ARTUR BĂLĂUCĂ

C. ANDREI
M. CIMPOEŞU
A. IVAN
I. NECHIFOR
N. SANDA
M. STOICA
E. ARITON
M. CIOBANAŞU
N. IVAN
V. NECHITA
M. SAS
V. STOICA
V. BALMOŞ
L. GLOAMBEŞ
L. IVANOVICI
AL. NEGRESCU
S. SFECLĂ
V. BARNEA
T. GLOAMBEŞ
G. MÂRŞANU
C. NOANĂ
C. SOLOMON
C. CHIRILĂ
GHE. ILIE
D. NĂSTRUŢ
L. PÂRLOG
N. SOLOMON

MATEMATICA

TESTARE NAŢIONALĂ 2007

REZOLVĂRI DETALIATE ALE CELOR 100 DE VARIANTE DEFINITIVE

Editura Taida
Succesul tău începe cu noi !

Scanned with OKEN Scanner

ARTUR BĂLĂUCĂ

C. ANDREI
M. CIMPOEŞU
A. IVAN
I. NECHIFOR
N. SANDA
M. STOICA

E. ARITON
M. CIOBANAŞU
N. IVAN
V. NECHITA
M. SAS
V. STOICA

V. BALMOŞ
L. GLOAMBEŞ
L. IVANOVICI
AL. NEGRESCU
S. SFECLĂ

V. BARNEA
T. GLOAMBEŞ
G. MÂRŞANU
C. NOANĂ
C. SOLOMON

C. CHIRILĂ
GHE. ILIE
D. NĂSTRUŢ
L. PÂRLOG
N. SOLOMON

MATEMATICA

TESTARE NAŢIONALĂ 2007

REZOLVĂRI DETALIATE
ALE CELOR
100
DE VARIANTE DEFINITIVE

Editura TAIDA
– IAŞI –

Scanned with OKEN Scanner

© Editura **TAIDA**
Toate drepturile aparţin Editurii TAIDA. Nici o parte a acestei cărţi nu poate fi retipărită, reprodusă sau utilizată în orice alt fel, inclusiv prin fotocopiere sau în formă electronică, fără avizul prealabil în scris al editurii.

EDITURA TAIDA Iaşi
Str. Vasile Lupu, nr. 70-74, bl. P3, sc. 3, et. 3, ap. 12, Iaşi - 700309
Tel/fax : *0232.270250;* Gsm. *0744.320323*
www.edituratаida.ro; office@edituratаida.ro; www.eduzone.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României

Matematică. Testarea Naţională 2007 – Rezolvări detaliate ale celor 100 de variante definitive

Iaşi, TAIDA, 2007
p. 118; 17 x 24 cm;

ISBN: **978-973-7669-21-6**

51(075.33)(079.1)

www.edituratаida.ro
www.eduzone.ro

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 1

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
444	a	1	-32	10	2	36	$2\sqrt{3}$	B	D	A	A

I. 1. $323 + 121 = 444$; **2.** $3025 > 3025$. Deci $a > b$. **3.** Cum $120 = 17 \cdot 7 + 1$. Restul este 1. **4.** $-32 \in \mathbb{Z}$. **5.** Aplicând definiția mediei geometrice a două numere pozitive a și b: $m_g = \sqrt{a \cdot b}$. $\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{100} = 10$. **6.** Cum $\mathcal{P} = 4a$, atunci $a = \frac{8}{4} = 2$ cm. **7.** Conform formulei volumului avem: $V = \frac{4\pi \cdot 3^3}{3} = 36\pi$ cm^3. **8.** Lungimea diagonalei cubului de muchie a este egală cu $a\sqrt{3}$. Diagonala este egală cu $2\sqrt{3}$ cm.

II.9. Putem scrie $3x \leq 6$ sau $x \leq 2$. Deci $x \in (-\infty; 2]$. Răspuns: **B. 10.** $E(6) = (6-7)^2 + |4-6| = 1 + 2 = 3$. Răspuns: **D. 11.** Raza cercului circumscris este egală tot cu 6 cm. Deci lungimea cercului este egală cu $2\pi \cdot 6 = 12\pi$ cm. Răspuns: **A. 12.** Linia mijlocie are lungimea egală cu semisuma lungimilor bazelor trapezului. $\frac{8+10}{2} = 9$ cm. Răspuns: **A.**

III. 13. a) $A = \{114, 122, 141, 212, 221, 411\}$.

b) Sunt 6 cazuri posibile și 3 cazuri favorabile. Deci probabilitatea este egală cu $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

14. a) $f(2) = 2a + b = 6$ și $f(3) = 3a + b = 8$, de unde $a = b = 2$.

b) Graficul funcției intersectează axele de coordonate în punctele $N(-1; 0)$ și $M(0; 2)$ (**fig. 1**)

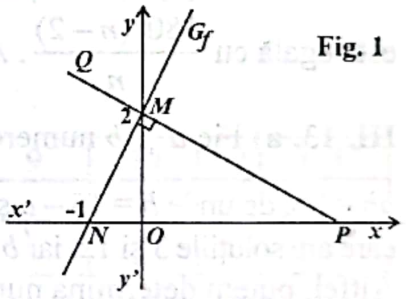


Fig. 1

c) Avem $O \in (NP)$ pentru că: $m(\sphericalangle QMN) > 90°$ și $m(\sphericalangle NMO) < 90°$ (**fig. 1**) Din $NP^2 = NM^2 + MP^2$ (**Pitagora**) rezultă $(c+1)^2 = (1^2 + 2^2) + (2^2 + c^2)$, de unde $c = 4$.

15. a) Vezi **figura 2**.

b) Avem $OM \| AD$ (linie mijlocie în ΔADB) și cum $AD \perp (ABA')$ iar $A'B \subset (ABA')$ rezultă $AD \perp A'B$, deci și $OM \perp A'B$. (**fig. 2**)

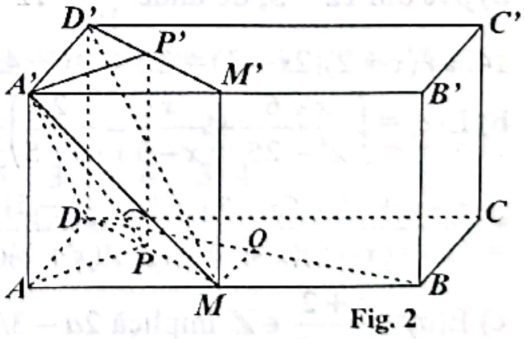


Fig. 2

c) Din $DD' \perp (ABC)$ rezultă că $DB = \text{pr}_{(ABC)}BD'$, deci $\sphericalangle(D'B, (ABC)) = \sphericalangle D'BD$. Din ΔABD dreptunghic rezultă $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 36 + 9 = 45$, de unde $BD = 3\sqrt{5}$ cm, urmează că $\Delta BDD'$ este dreptunghic isoscel și $m(\sphericalangle DBD') = 45°$.

d) Fie punctele M', P, P' mijloacele segmentelor $[A'B']$, $[DM]$ și, respectiv, $[D'M']$. $\Delta A'AD \equiv \Delta A'AM$ (C. C.), de unde $(A'D) \equiv (A'M)$ și cum P este mijlocul segmentului $[DM]$ rezultă că $A'P \perp DM$. Din $MM' \| DD'$, $(DD') \equiv (MM')$ și $DD' \perp DM$ rezultă că patrulaterul $D'DMM'$ este dreptunghi și $PP' \perp DM$. Din $PP' \perp DM$, $PP' \subset (D'DM)$, $A'P \perp DM$, $A'P \subset (A'DM)$ și $DM = (D'DM) \cap (A'DM)$ rezultă că unghiul plan corespunzător diedrului format de planele $(A'DM)$ și $(D'DM)$ este

unghiul $\sphericalangle A'PP'$. Din triunghiul dreptunghic isoscel $A'D'M'$ se obține $A'P' = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, iar din triunghiul dreptunghic $A'PP'$ se obține $\operatorname{tg}(\sphericalangle A'PP') = \frac{A'P'}{PP'} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

VARIANTA 2

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
78	14	$5\sqrt{2}$	1 sau 5 sau 7 sau 35	120	60	$8\sqrt{3}$	112	B	B	C	C

I. 1. $26 \cdot 3 = 78$. **2.** $73 = 5 \cdot 14 + 3$. Câtul este 14. **3.** $5\sqrt{2} = \sqrt{50} > \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. Mai mare este numărul $5\sqrt{2}$. **4.** Unul din elementele mulțimii $\{1, 5, 7, 35\}$. **5.** $180° - 60° = 120°$. **6.** Aria unui triunghi dreptunghic este egală cu semiprodusul catetelor $\frac{10 \cdot 12}{2} = 60\ \text{cm}^2$. **7.** Diagonala are lungimea de $8\sqrt{3}$ cm. **8.** Aplicând formula volumului: $\mathcal{V} = \pi \cdot 4^2 \cdot 7 = 112\pi$.

II.9. Ridicând la pătrat $x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 49$, deci $x^2 + \frac{1}{x^2} = 47$. Răspuns: **B. 10.** Dacă $A(2, 3)$ aparține graficului atunci $f(2) = 3$ și $2a - 3 = 3$, de unde $a = 3$. Răspuns: **B. 11.** Pentru a afla simetricul, calculăm opusul coordonatelor. Așadar, simetricul are coordonatele $(3, 2)$. Răspuns: **C. 12.** Măsura unghiului unui poligon regulat cu n laturi este egală cu $\frac{180°(n-2)}{n}$. Avem unghiul de $\frac{180° \cdot (5-2)}{5} = 108°$. Răspuns: **D.**

III. 13. a) Fie a și b numerele căutate. $m_a = \frac{a+b}{2} = 7{,}5$ și $\sqrt{ab} = 6$ implică $a + b = 15$ și $ab = 36$, de unde $b = 15 - a$ și $a \cdot b = 36$. Se obține ecuația de gradul al II-lea $a^2 - 15a + 36 = 0$, care are soluțiile 3 și 12, iar $b \in \{3, 12\}$. Numerele căutate sunt 3 și 12.
Altfel, putem determina numerele a și b utilizând divizorii lui 36 în relația $a \cdot b = 36$.

b) $p\%$ din $12 = 3$, de unde $\frac{p}{100} \cdot 12 = 3$. Deci $p = \frac{100 \cdot 3}{12} = 25$ și $b = 25\%$ din a.

14. a) $(x + 2)(2x - 3) = 2x^2 - 3x + 4x - 6 = 2x^2 + x - 6$.

b) $E(x) = \left(\frac{x-6}{x^2-25} + \frac{x}{x-5} - \frac{2}{x+5}\right) \cdot \frac{(x-5)(x+5)}{(x+2) \cdot (2x-3)} =$

$= \frac{x - 6 + x^2 + 5x - 2x + 10}{\cancel{(x-5)(x+5)}} \cdot \frac{\cancel{(x-5)(x+5)}}{(x+2)(2x-3)} = \frac{x^2 + 4x + 4}{(x+2)(2x-3)} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)(2x-3)} = \frac{x+2}{2x-3}$.

c) $E(a) = \frac{a+2}{2a-3} \in \mathbb{Z}$ implică $2a - 3 / a + 2$, de unde $2a - 3 / 2a + 4$ sau $2a - 3 / (2a - 3) + 7$.
Cum $(2a - 3) / (2a - 3)$ rezultă $2a - 3 / 7$, adică $2a - 3 \in \{-7; -1; 1; 7\}$, de unde $a \in \{-2; 1; 2; 5\}$.
Dar, din condițiile de existență, $a \in \mathbb{R} \setminus \{-5; -2; \frac{3}{2}; 5\}$, rezultând că $a \in \{1; 2\}$.

Scanned with OKEN Scanner

15. a) Vezi **figura 1.**

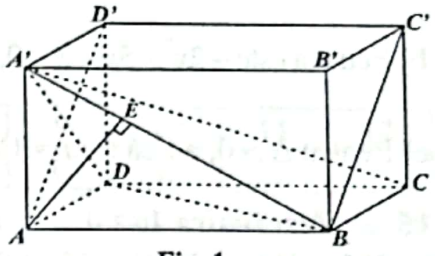


Fig. 1

b) Din triunghiul dreptunghic ADD' rezultă:

$AD'^2 = AD^2 + DD'^2 = \left(8\sqrt{7}\right)^2 + \left(8\sqrt{2}\right)^2 = 64 \cdot (7+2) = 64 \cdot 9$

(**Pitagora**), de unde $AD' = 24$ cm. (**fig. 1**). $AB \perp (BCC')$ şi $BC' \subset (BCC')$ implică $AB \perp BC'$, deci $ABC'D'$ este dreptunghi şi $\mathcal{A}_{ABC'D'} = AB \cdot AD'$, de unde $192 = AB \cdot 24$ şi $AB = 8$ cm.

c) $AD \parallel BC$ implică $\sphericalangle(A'C, AD) = \sphericalangle(A'C, BC) = \sphericalangle A'CB$. Cum $BC \perp (ABB')$ şi $A'B \subset (ABB')$, rezultă că $BC \perp A'B$. Din $\Delta AA'B$ dreptunghic, rezultă $A'B^2 = AB^2 + AA'^2 =$

$= 64 + 64 \cdot 2 = 64 \cdot 3$, de unde $\operatorname{tg}(\sphericalangle A'CB) = \dfrac{A'B}{BC} = \dfrac{8\sqrt{3}}{8\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

d) Deoarece $AD \parallel BC$ şi $BC \subset (A'BC)$ rezultă că $AD \parallel (BCA')$ şi punctele A şi D sunt egal depărtate de planul $(A'BC)$. Din $BC \subset (A'BC)$ şi $BC \perp (ABA')$ rezultă că $(A'BC) \perp (ABA')$. Fie $AE \perp A'B$. Cum $(A'BC) \perp (ABA')$ şi $AE \perp A'B$ rezultă că $AE \perp (BCA')$ şi distanţa de la punctul A la planul (BCA') este egală cu lungimea segmentului AE. Avem $AE = \dfrac{AB \cdot AA'}{A'B} = \dfrac{8\sqrt{6}}{3}$ cm (**teorema a doua a înălţimii**). *Soluţia 2.* Exprimăm volumul tetraedrului $A'BCD$ în două moduri: $\mathcal{V}_{A'BCD} = \dfrac{\mathcal{A}_{BCD} \cdot AA'}{3} = \dfrac{\mathcal{A}_{A'BC} \cdot d(D,(A'BC))}{3}$ (am notat cu $d(D, (A'BC))$ distanţa de la punctul D la planul $(A'BC)$).

VARIANTA 3

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
81	$\frac{4}{3}$	11	$2 \cdot 3^2$	144	24	100	72	C	C	B	B

I. 1. $405 : 5 = 81$. **2.** Doar $\dfrac{4}{3} > 1$. **3.** $x - 4 = 7$ se mai scrie $x = 11$. **4.** $18 = 32 \cdot 2$.

5. $\mathcal{A} = \dfrac{12 \cdot 24}{2} = 144\ \text{cm}^2$. **6.** $\mathcal{P} = 2(4+8) = 2 \cdot 12 = 24$ cm. **7.** Conform formulei $\mathcal{A} = 4\pi \cdot 25 = 100\pi\ \text{cm}^2$.

8. Aplicând formula $\mathcal{V} = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72\ \text{cm}^3$. **II.9.** $\dfrac{2}{3} : 2^2 + \dfrac{5}{6} = \dfrac{2}{3} : 4 + \dfrac{5}{6} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{2}{12} + \dfrac{10}{12} = 1$.

Răspuns: **C. 10.** Valoarea $E(-2) = (-2+3)^2 - 3 = -2$. Răspuns: **C. 11.** Rezolvând ecuaţia $f(x) = g(x)$, adică $3 - 4x = 2x - 21$, cu soluţia $x = 4$, iar $f(x) = g(x) = -13$. Răspuns: **B. 12.** $AB = CD = \dfrac{15 - BC}{2} = \dfrac{15-3}{2} = 6$ cm. Răspuns: **B.**

III. 13. Numărul elevilor care cunosc doar limba engleză este $160 - 82 = 78$ iar numărul elevilor care cunosc doar limba franceză este $160 - 120 = 40$. **a)** Ambele discipline sunt cunoscute de $160 - 78 - 40 = 42$ de elevi. **b)** 40 de elevi.

14. a) Ecuaţia este $-x = 0$ cu soluţia $x = 0$. $S = \{0\}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Ecuația este $-2x^2-5x-2=0$, $\Delta=25-4\cdot(-2)\cdot(-2)=9$ iar $x_1=\frac{5+3}{-4}=-2$ și $x_2=\frac{5-3}{-4}=-\frac{1}{2}$.

c) Pentru $\Delta>0$, adică $(2m-1)^2-4m^2>0$ și, altfel scris, $m<\frac{1}{4}$ sau $m\in\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$.

15. a) Vezi **figura 1.**

b) SM și AM fiind înălțimi în ΔSCB, respectiv, ΔABC (**fig. 1**): $BC\perp SM$ și $BC\perp AM$, cum $AM, SM\subset(ASM)$ și $AM\cap SM=\{M\}$, rezultă $BC\perp(SAM)$, deci $SA\perp BC$. În ipoteză $SA\perp SM$, iar $SM\cap BC=\{M\}$, $SM, BC\subset(SBC)$ și atunci $SA\perp(SBC)$, de unde $SA\perp SC$.

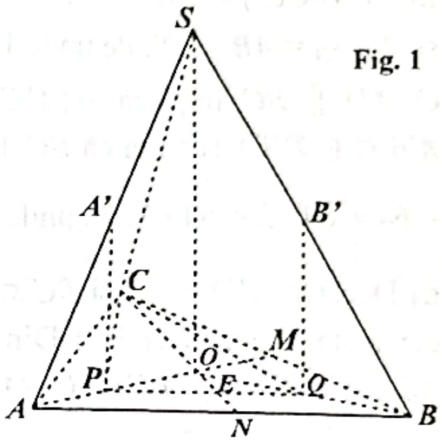


Fig. 1

c) Fie O centrul bazei ΔABC. În triunghiul ΔSAC: $m(\sphericalangle ASC)=90°$, $SA=SC=6\sqrt{2}$, atunci $AC^2=\left(6\sqrt{2}\right)^2+\left(6\sqrt{2}\right)^2$, de unde $AC=12$, iar $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{12^2\sqrt{3}}{4}=36\sqrt{3}$ cm^2.

Distanța AO are lungimea egală cu $\frac{2}{3}$ din înălțime. Deci $AO=\frac{2}{3}\cdot\frac{12\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ cm. Cum $SO\perp(ABC)$, ΔSOA este dreptunghic și $SA^2=SO^2+OA^2$, de unde $SO^2=\left(6\sqrt{2}\right)^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2=24$, iar $SO=2\sqrt{6}$ cm. Prin urmare $\mathcal{V}_{SABC}=\frac{SO\cdot\mathcal{A}_{ABC}}{3}=\frac{2\sqrt{6}\cdot36\sqrt{3}}{3}=72\sqrt{2}$ cm^3.

d) Fie $CO\cap AB=\{N\}$ și $CN\cap PQ=\{E\}$. $[A'P]$ și $[B'Q]$ sunt linii mijlocii în triunghiurile SAO și, respectiv, SBO, de unde $(AP)\equiv(OP)$ și $(OQ)\equiv(QB)$, deci $[PQ]$ este linie mijlocie în ΔOAB și $PQ=\frac{AB}{2}$. Deoarece $(CA)\equiv(CB)$ și $(OA)\equiv(OB)$ rezultă că dreapta OC este mediatoarea segmentelor $[AB]$ și $[PQ]$, deci $CE\perp PQ$. Din $PQ\parallel AB$ și $(PA)\equiv(PO)$ rezultă că $(OE)\equiv(EN)$ (**teorema reciprocă a liniei mijlocii în triunghi**).

Avem $CE=CN-EN=CN-\frac{ON}{2}=CN-\frac{CN}{6}=\frac{5}{6}CN$.

$$\mathcal{A}_{\Delta CPQ}=\frac{PQ\cdot CE}{2}=\frac{6\cdot\frac{5}{6}\cdot6\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}\text{ cm}^2.$$

Observație: Se poate aborda punctul **d)** și utilizând faptul că mediana unui triunghi îl împarte pe acesta în două triunghiuri care au aceeași arie (*triunghiuri echivalente*) iar centrul de greutate îl împarte în trei triunghiuri echivalente.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 4

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	230	10	90	110	8	18	81	C	B	C	A

I. 1. $32 : 4 - 7 = 8 - 7 = 1$. **2.** Ultima cifră a numărului $\overline{23x}$ este 0 sau 5. Numărul minim este 230. **3.** $\sqrt{2 \cdot 50} = \sqrt{100} = 10$. **4.** $\frac{3}{4} \cdot 120 = 3 \cdot 30 = 90$. **5.** $180° - 70° = 110°$. **6.** Conform teoremei lui **Pitagora**, cealaltă catetă are lungimea de $\sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{64} = 8$ cm. **7.** $6 \cdot 3 = 18$ muchii. **8.** Conform formulei avem $\mathcal{V} = \pi \cdot 3^2 \cdot 9 = 81\pi$ cm^3.

II.9. $E(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 + (2 + 2)(2 - 3) = -4$. Răspuns: **C. 10.** $\sqrt{3} - \sqrt{5} < 0$ şi atunci rezultatul este $\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{3} = 2\sqrt{5}$. Răspuns: **B. 11.** Un cub cu muchia de 1 dm are volumul egal cu 1 dm^3. Un cub cu muchia de 3 dm are volumul egal cu 27 dm^3 şi va cântări $27 \cdot 7 = 189$ kg. Răspuns: **C. 12.** $\mathcal{P}_{BMNC} = BM + MN + NC + CB = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2} + BC = \frac{5AB}{2} = 37{,}5$ cm. Răspuns: **A.**

III. 13. Notăm cu x numărul apartamentelor cu două camere şi cu y numărul apartamentelor cu 3 camere. Atunci $2x + 3y = 76$ şi $x + y = 28$ iar rezolvând sistemul obţinem $x = 8$ şi $y = 20$.

a) 8 apartamente cu două camere.

b) Dacă x% din 20 = 8, atunci $x = \frac{8 \cdot 100}{20} = 40$. Deci 40%.

14. a) Graficul funcţiei f, intersectează axa Ox în punctul $A\left(\frac{5}{3};0\right)$ şi axa Oy în punctul $B(0; 5)$ (**fig. 1**).

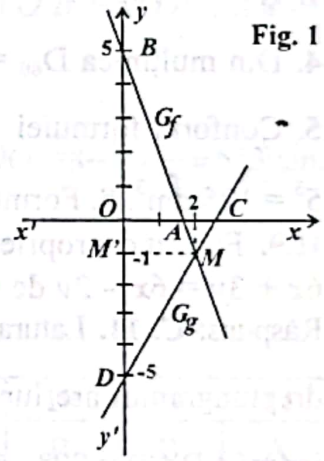


Fig. 1

b) Graficul funcţiei g, intersectează axa Ox în punctul $C\left(\frac{5}{2};0\right)$ şi axa Oy în punctul $D(0; -5)$. Abscisa punctului M de intersecţie al graficelor celor două funcţii este soluţie a ecuaţiei $f(x) = g(x)$, adică $5 - 3x = 2x - 5$ care are soluţia 2. Deci avem $M(2; -1)$.

Fie $MM' \perp Oy$ $(M' \in Oy)$. $\mathcal{A}_{BDM} = \frac{BD \cdot MM'}{2} = \frac{10 \cdot 2}{2} = 10$ (u. a.).

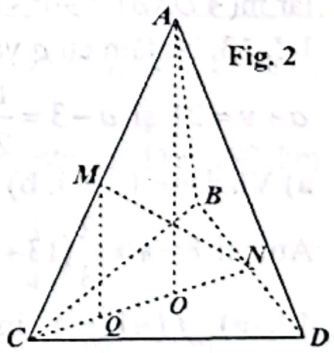


Fig. 2

15. a) Vezi **figura 2**.

b) Triunghiurile ABC şi ADC fiind echilaterale (**fig. 2**): $BM = DM$ iar $BM \perp AC$, $DM \perp AC$ şi cum $BM, DM \subset (BMD)$, $BM \cap DM = \{M\}$, rezultă că $AC \perp (MBD)$. (**fig. 2**).

c) $BM = DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ şi fie N mijlocul lui (BD). În triunghiul ΔMND: $m(\sphericalangle MND) = 90°$ şi atunci: $MN^2 = MD^2 - ND^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, ceea ce implică $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar $\mathcal{A}_{\Delta MBD} = \dfrac{MN \cdot BD}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$ (u. a.)

d) Fie $AO \perp (ABC)$ şi $MQ \perp (ABC)$ $(O,\ Q \in (ABC))$. Avem $pr_{(ABC)}[AC] = [OC]$, deci $Q \in (OC)$ şi $MQ \parallel AO$. Cum $(MA) \equiv (MC)$ rezultă că $[CQ] \equiv [OQ]$, deci $[MQ]$ este linie mijlocie în ΔACO şi $MQ = \dfrac{OA}{2}$. Înălţimea $[OA]$ a tetraedrului regulat $ABCD$ o determinăm din triunghiul dreptunghic AOC.

Avem: $OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ şi $OV^2 = AC^2 - OC^2 = a^2 - \dfrac{3a^2}{9} = \dfrac{6a^2}{9}$, deci $OV = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ şi $MQ = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ (u. l.).

VARIANTA 5

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
30	$\frac{26}{5}$	3	2	10	48	125	48	C	C	B	A

I. 1. $10 + 100 : 5 = 10 + 20 = 30$. **2.** $5{,}2 = \dfrac{52}{10} = \dfrac{26}{5}$. **3.** Altfel $2x = 6$ cu soluţia $x = 3$. **4.** Din mulţimea $D_{80} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80\}$ cel mai mic număr par este 2. **5.** Conform formulei $\dfrac{5+15}{2} = 10$. **6.** $P = 4a = 4 \cdot 12 = 48$ cm. **7.** Volumul este egal cu $5^3 = 125$ dm^3. **8.** Formula $\mathcal{A}_l = 2\pi R \cdot G$ ne dă $\mathcal{A}_l = 2\pi \cdot 4 \cdot 6 = 48\pi$ cm^2.

II.9. Folosind proprietatea fundamentală a proporţiilor avem: $3(2x + y) = 2(3x - y)$ şi $6x + 3y = 6x - 2y$ de unde $5y = 0$ şi $y = 0$. Răspuns: **C. 10.** Avem $x < 2$ şi $x \in (-\infty; 2)$. Răspuns: **C. 11.** Latura pătratului este egală cu 8 cm şi perimetrul de 32 cm. Atunci lăţimea dreptunghiului are lungimea egală cu $\dfrac{32}{2} - 10 = 6$ cm. Răspuns: **B. 12.** $m(\sphericalangle DAC) = 60°$ iar $m(\sphericalangle DAB) = 90° - 60° = 30°$. Răspuns: **A.**

III. 13. Notăm cu a vârsta lui Andrei şi cu v vârsta lui Vlad (la momentul actual). Atunci $a + v = 21$ şi $a - 3 = \dfrac{1}{2}(v - 3)$. Rezolvând sistemul obţinem $a = 8$, $v = 13$.

a) Vlad are 13 ani. **b)** Notăm cu k numărul de ani ceruţi.

Atunci $8 + k = \dfrac{2}{3}(13 + k)$ cu soluţia $k = 2$. Peste 2 ani.

14. a) $f(-1) = 4$ implică $-a + b = 4$, iar $f(2) = -5$ implică $2a + b = -5$. Obţinem sistemul $\begin{cases} -a+b=4 \\ 2a+b=-5 \end{cases}$ cu soluţia $a = -3$ şi $b = 1$.

b) Punctele $C(0;1)$ şi $D\left(\dfrac{1}{3};0\right)$ aparţin graficului funcţiei din **fig. 1**.

Graficul funcţiei este reprezentat de dreapta CD.

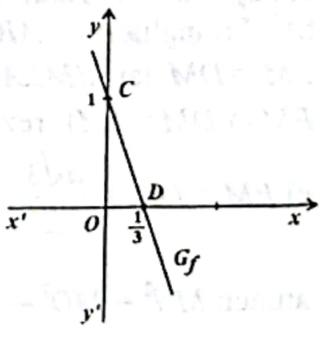


Fig. 1

Scanned with OKEN Scanner

Suprafața căutată este triunghiul ΔCOD. $\mathcal{A}_{\Delta COD}=\dfrac{OC\cdot OD}{2}=\dfrac{1\cdot\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{1}{6}$ (u.a.)

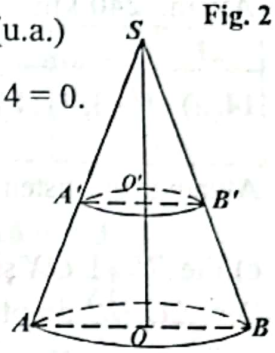


Fig. 2

c) $f(m^2)=m-3$, atunci $-3m^2+1=m-3$ și obținem ecuația $3m^2+m-4=0$.

$\Delta=1-4\cdot3\cdot(-4)=49$. $m_1=\dfrac{-1+7}{6}$, $m_2=\dfrac{-1-7}{6}$. $S=\left\{-\dfrac{4}{3};1\right\}$.

15. a) Vezi **figura 2.**

b) $\mathcal{V}=\dfrac{\pi\cdot36\cdot8}{3}=96\pi\,\text{cm}^3$.

c) Din ΔVOB dreptunghic cu teorema lui **Pitagora** se obține $VB=10$ cm (**fig. 2**). Exprimăm aria triunghiului VAB în două moduri, astfel: $\mathcal{A}_{VAB}=\dfrac{VO\cdot AB}{2}=\dfrac{VA\cdot VB\cdot\sin(\sphericalangle AVB)}{2}$, de unde

$\sin(\sphericalangle AVB)=\dfrac{VO\cdot AB}{VA\cdot VB}=\dfrac{8\cdot12}{10\cdot10}=\dfrac{96}{100}=0{,}96$.

d) Fie O' punctul de intersecție al planului de secțiune cu înălțimea VO și punctele A', B' intersecțiile planului de secțiune cu generatoarele (VA) și (VB) ale conului.

Avem $\dfrac{\mathcal{V}_{\text{con mare}}}{\mathcal{V}_{\text{con mic}}}=\dfrac{\frac{\pi\cdot OB^2\cdot VO}{3}}{\frac{\pi\cdot O'B'^2\cdot VO'}{3}}=\dfrac{OB^2\cdot VO}{O'B'^2\cdot VO'}=\left(\dfrac{VO}{VO'}\right)^3=27$ pentru că $\Delta VO'B'\sim\Delta VOB$ (**t.f.a.**) și

$\dfrac{VO}{VO'}=\dfrac{OB}{O'B'}$. Din $\left(\dfrac{VO}{VO'}\right)^3=27$ rezultă $\dfrac{VO}{VO'}=3$, de unde $VO'=\dfrac{8}{3}$ cm și $OO'=8-\dfrac{8}{3}=\dfrac{16}{3}=5,(3)$ cm.

VARIANTA 6

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
19	a	30	2	$4\sqrt{3}$	8	14	15	C	B	B	A

III. 13. a) $\dfrac{40}{100}$ din lungimea autostrăzii construite în ultimii 2 ani reprezintă 72 km, de unde rezultă că în această perioadă s-au construit $72:\dfrac{4}{100}=180$ km de autostradă. Dar 180 km reprezintă $\dfrac{3}{4}$ din lungimea autostrăzii, adică lungimea acesteia este de $180:\dfrac{3}{4}=240$ km.

Soluția 2: Fie a lungimea totală a autostrăzii. În primul an s-au construit $\dfrac{a}{4}$ (km). În al doilea an s-au construit $\dfrac{60}{100}\cdot\left(a-\dfrac{a}{4}\right)=\dfrac{9}{20}a$ (km), iar în al treilea an au rămas de construit $a-\dfrac{a}{4}-\dfrac{9}{20}a=\dfrac{6}{20}a$ (km). Atunci $\dfrac{6}{20}a=72$, de unde $a=240$ km.

Scanned with OKEN Scanner

b) În primii 2 ani firma a construit $240-72=168$ km de autostradă.

Avem: 240 km ..... 2800 mil. euro ; $x=\dfrac{2800\cdot 168}{240}=1960$ mil. euro.

168 km x

14. a) $A(-3;4)$; **b)** Fie G_f graficul funcției f. Cum $O\in G_f$ și $B\in G_f$, rezultă că $f(0)=0$ și $f(2)=4$.

Atunci avem sistemul: $\begin{cases} b=0 \\ 2a+b=4 \end{cases}$ cu soluția $a=2$, $b=0$.

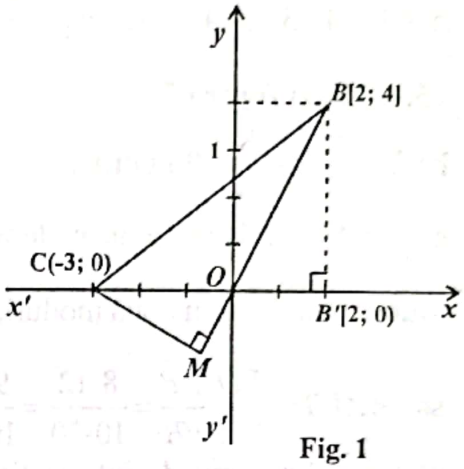


Fig. 1

c) Fie $BB'\perp OX$ și $CM\perp OB$ ($B'\in OX$ și $M\in OB$).

Din $\Delta OBB'$ dreptunghic rezultă $OB^2=BB'^2+OB'^2=$ $=2^2+4^2=20$ (teorema lui **Pitagora**) de unde $OB=2\sqrt{5}$ (u.l.). Exprimăm aria ΔBOC în două moduri: $\mathcal{A}_{\Delta BOC}=\dfrac{BB'\cdot CO}{2}=\dfrac{CM\cdot OB}{2}$, de unde

$$CM=\frac{BB'\cdot CO}{OB}=\frac{4\cdot 3}{2\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}\text{ (u.l.).}$$

Soluția 2: $\Delta OBB'\sim\Delta OCM$ (u.u.) pentru că $\sphericalangle MOC\equiv$ $\equiv\sphericalangle BOB'$ (opuse la vârf) și $m(\sphericalangle CMO)=m(\sphericalangle BB'O)=90°$.

Avem $\dfrac{MC}{BB'}=\dfrac{OC}{OB}$, de unde $MC=\dfrac{BB'\cdot OC}{OB}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ (u.l.)

15. a) Vezi **figura 2.**

b) $\mathcal{V}_{SPACE}=\dfrac{\mathcal{A}_{PACE}\cdot SO}{3}=\dfrac{144\cdot 6}{3}=288\text{ cm}^3$.

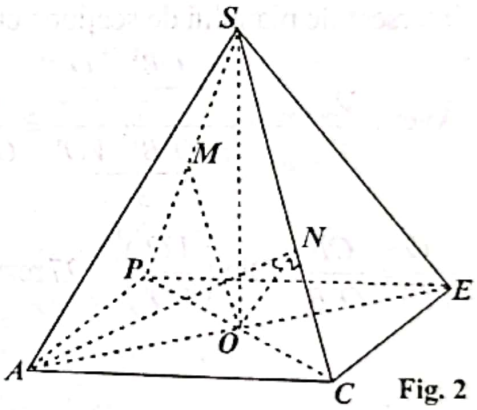


Fig. 2

c) $[OM]$ este linie mijlocie în ΔSPC, deci $MO\parallel SC$ și cum $SC\subset(SCE)$, rezultă că $OM\parallel(SEC)$. (**fig.2**).

d) Fie $ON\perp SC$ ($N\in SC$). Din $SO\perp(ABC)$ și $AO\subset(ABC)$, rezultă $AO\perp SO$, dar $AO\perp PC$ (diagonale în pătrat), deci $AO\perp(SPC)$, și cum $ON\perp SC$; ON, $SC\subset(PSC)$ conduce la $AN\perp SC$ (**teorema celor trei perpendiculare**). $AN\perp SC$ și $ON\perp SC$ conduce la $m\left(\sphericalangle\left((SPC),(SAC)\right)\right)=m(\sphericalangle ANO)$. Avem $OC=\dfrac{PC}{2}=\dfrac{12\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$.

$SC^2=OS^2+OC^2=36+72=108$, de unde $SC=6\sqrt{3}$ cm și $ON=\dfrac{OS\cdot OC}{SC}=\dfrac{6\cdot 6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}=2\sqrt{6}$ cm (teorema **a doua a înălțimii**). Triunghiul AON dreptunghic conduce la: $tg(\sphericalangle ANO)=\dfrac{OA}{ON}=\dfrac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}=\sqrt{3}$, de unde $m(\sphericalangle ANO)=60°$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 7

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
37	3002	36	$\frac{11}{16}$	12	$18\sqrt{3}$	6	120	A	C	D	A

III. 13. a) $A = 2^{2n} \cdot 5^{2n+1} - 2^{2n} \cdot 5^{2n} = 2^{2n} \cdot 5^{2n} \cdot (5-1) = 2^{2n+2} \cdot 5^{2n} = (2^{n+1} \cdot 5^n)^2$.

b) $\sqrt{A} = 2^{n+1} \cdot 5^n$, de unde rezultă că $\sqrt{a}$ nu se divide cu 10 numai dacă $n = 0$.

14. a) Fie G_f graficul funcției f. $A \in G_f$ implică $f(1) = 1$. Se obține ecuația $2m - 1 + 3 - m = 1$ care are soluția -1. Deci $m = -1$.

b) Pentru $m = -1$ se obține funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -3x + 4$. Intersecția graficului funcției cu axele de coordonate sunt punctele $B\left(\frac{4}{3}; 0\right)$ și $C(0; 4)$. Graficul funcție este dreapta BC. **(fig. 1)**

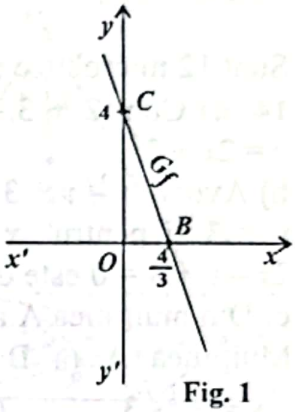


Fig. 1

c) Din triunghiul dreptunghic OBC cu teorema lui **Pitagora** se obține: $BC^2 = OB^2 + OC^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4^2 = \frac{16}{9} + 16 = \frac{160}{9}$, de unde $BC = \frac{4\sqrt{10}}{3}$ (u.l.) și raza cercului circumscris triunghiului are lungimea $R = \frac{2\sqrt{10}}{3}$ (u.l.).

15. a) Vezi **figura 2.**

b) $\mathcal{A}_l = P_b \cdot h$, de unde $72 = 3 \cdot 4 \cdot h$. Deci $h = AA' = 6$ cm. **(fig. 2)**

c) Fie G' centrul de greutate al bazei $A'B'C'$ și G centrul de greutate al bazei ABC.

$$\mathcal{V}_{G'ABC} = \frac{\mathcal{A}_{ABC} \cdot GG'}{3} = \frac{\frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 6}{3} = 8\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

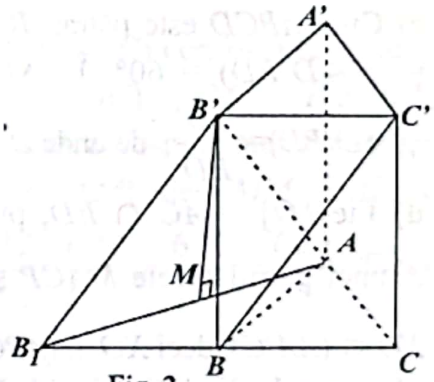


Fig. 2

d) Fie punctul B_1 simetricul punctului C față de punctul B. Patrulaterul $BC'B'B_1$ este paralelogram pentru că $B'C' \parallel BB_1$ și $[B'C'] \equiv [BB_1]$, de unde rezultă că: $B'B_1 \parallel BC'$; $(BC') \equiv (B'B_1)$ și $m(\sphericalangle(AB', BC')) = m(\sphericalangle B_1B'A)$.

În ΔB_1AC avem $AB = \frac{B_1C}{2}$ și cum (AB) este mediană rezultă $m(\sphericalangle B_1AC) = 90°$, de unde $\sin 60° = \frac{AB_1}{B_1C}$ și $AB_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 = 4\sqrt{3}$ cm. Fie punctul M mijlocul segmentului $[AB_1]$.

$\Delta ABB' \equiv \Delta BCC'$ (C. C.), de unde $[AB'] \equiv [BC']$, dar $[B'B_1] \equiv [BC']$ și urmează că $(AB') \equiv (B_1B')$, deci $\Delta B'AB_1$ este isoscel și $MB' \perp AB_1$. Din triunghiurile dreptunghice ABB' și MAB' cu teorema lui **Pitagora** obținem: $AB'^2 = AB^2 + BB'^2$ și $MB'^2 = AB'^2 = AB'^2 - MA^2$, de unde: $AB' = 2\sqrt{13}$ cm și $MB' = 2\sqrt{10}$ cm. Exprimăm aria $\Delta AB_1B'$ în două moduri și obținem:

$$\mathcal{A}_{AB_1B'} = \frac{AB_1 \cdot MB'}{2} = \frac{AB' \cdot B_1B' \cdot \sin(\sphericalangle AB'B_1)}{2}, \text{ de unde } \sin(\sphericalangle AB'B_1) = \frac{4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{10}}{\left(2\sqrt{13}\right)^2} = \frac{8\sqrt{30}}{52} = \frac{2\sqrt{30}}{13}.$$

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 8

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
15	3	12	150	19	8	2	60	C	B	C	A

III. 13. a) Ecuația este echivalentă cu $2x = 8$, adică $x \in \{4\}$.

b) Notăm cu m numărul microbuzelor şi cu c numărul camioanelor. Ecuațiile problemei sunt $m = 3c$ şi $m - 5 = c + 3$. Se obține sistemul $\begin{cases} m = 3c \\ m - 5 = c + 3 \end{cases}$ cu soluția $(m, n) \in \{(12,4)\}$.

Sunt 12 microbuze şi 4 camioane.

14. a) Cum $2 + 3 - 5 = 0$, atunci $(2, 3) \in B$. $2x - y + 3 = 0$, atunci $y = 2x + 3$.

b) Avem $2x - y + 3 = 0$, echivalent cu $y = 2x + 3$. Pentru $x = 0$ se obține $y = 3$ şi pentru $x = 1$ se obține $y = 5$. Mulțimea soluțiilor ecuației $2x - y + 3 = 0$ este dreapta AB, unde $A(0, 3)$ şi $B(1, 5)$ (**fig. 1**).

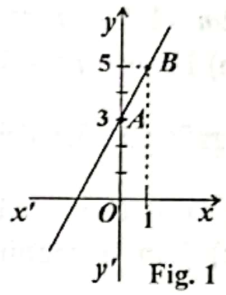


Fig. 1

c) Din mulțimea A avem $y = 2x + 3$ iar din B avem $y = -x + 5$. Mulțimea $A \cap B$ va avea ca element soluția sistemului $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -x + 5 \end{cases}$, adică $\left(\frac{2}{3}; \frac{13}{3}\right)$.

15. a) Vezi **figura 2.**

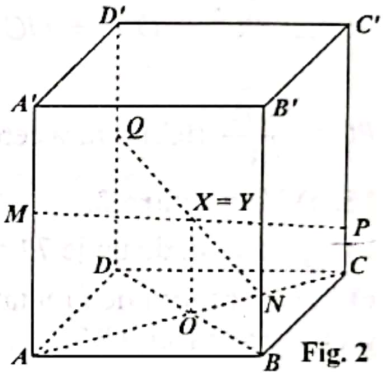


Fig. 2

b) Cum $AD \perp DC$, $AD \perp DD'$ (**fig. 2**) şi DC, $DD' \subset (DCD')$ avem $AD \perp (DCD')$ şi cum $D'C \subset (DD'C)$, atunci $AD \perp D'C$.

c) Cum $ABCD$ este pătrat: $BD = 5\sqrt{2}$ iar $m(\sphericalangle(D'B, (ABC))) = m(\sphericalangle D'BD) = 60°$. În $\Delta D'DB$: $m(\sphericalangle D'DB) = 90°$, atunci $\operatorname{tg}(\sphericalangle D'BD) = \frac{DD'}{BD}$, de unde $DD' = 5\sqrt{6}$ cm. Cum $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h$, atunci $\mathcal{A}_l = 20 \cdot 5\sqrt{6} = 100\sqrt{6}$ cm^2.

d) Fie $\{O\} = AC \cap BD$, punctul X mijlocul lui $[MP]$ şi punctul Y mijlocul lui $[QN]$. Atunci patrulaterele $MACP$ şi $NBDQ$ sunt trapeze dreptunghice iar $XO = \frac{PC + MA}{2} = 4$, dar $XO \subset (AA'C)$, deci $XO \perp (ABC)$. Analog se obține $YO = 4$ şi $YO \perp (ABC)$. Concluzia este că punctele X şi Y coincid. Deci $[MP]$ şi $[NQ]$ au un punct comun, ceea ce conduce la coplanaritatea punctelor M, N, P, Q.

VARIANTA 9

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	b	2	$[0; 3]$	150	48	13	5	C	D	B	A

III. 13. Notăm cu x prețul aparatului. După ieftinire prețul său este $x - \frac{20}{100}x = \frac{80}{100}x$. După scumpire prețul său este $\frac{80}{100}x + \frac{20}{100} \cdot \frac{80}{100}x = \frac{96}{100}x$. Atunci $\frac{96}{100}x = 1152$, de unde $x = 1200$ lei. **a)** 1200 lei; **b)** $\frac{80}{100} \cdot 1200 = 960$ lei.

Scanned with OKEN Scanner

14. a) Cum $f(0) = 6$ şi $f(3) = 0$ rezultă că punctele $A(0, 6)$ şi $B(3, 0)$ aparţin graficului funcţiei f. Cum $g(0) = 2$ şi $g(2) = 2$ rezultă că punctele $C(0, 2)$ şi $D(2, 2)$ aparţin graficului funcţiei g, o dreaptă paralelă cu axa absciselor.

b) Rezolvând ecuaţia $f(x) = g(x)$ vom obţine coordonatele punctului de intersecţie al graficelor funcţiilor. Aşadar, $-2x + 6 = 2$ cu soluţia $x = 2$. Punctul de intersecţie este $D(2, 2)$. Patrulaterul căutat este trapezul $OCDB$. **(fig. 1)**

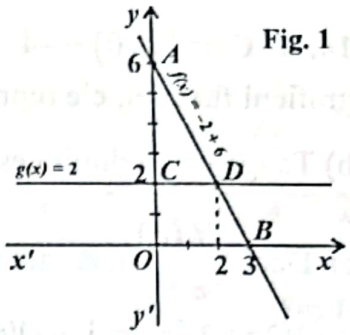


Fig. 1

$$\mathcal{A}_{OCDB} = \frac{(CD + OB) \cdot OC}{2} = \frac{(2+3) \cdot 2}{2} = 5 \text{ (u.a.).}$$

c) Observăm că $f(3) = 0$ şi atunci produsul $p = 0$.

15. a) Vezi **figura 2.**

b) Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Atunci OM este linie mijlocie în ΔABC şi $OM = 6$ cm, iar din teorema lui **Pitagora** aplicată în ΔVOM ($m(\sphericalangle VOM) = 90°$) avem $VO^2 + OM^2 = VM^2$, de unde $VM^2 = 8^2 + 6^2 = 100$ şi $VM = 10$ cm.

Atunci $\mathcal{A}_l = \frac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2} = \frac{4AB \cdot VM}{2} = 240 \text{ cm}^2$.

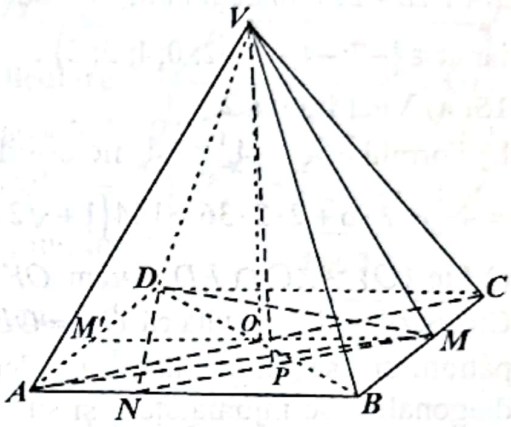


Fig. 2

c) Atunci $AN = \frac{AB}{4} = 3$ cm şi $\mathcal{A}_{MND} = \mathcal{A}_{ABCD} - (\mathcal{A}_{AND} + \mathcal{A}_{NBM} + \mathcal{A}_{CMD}) =$

$$= AB^2 - \left(\frac{AN \cdot AD}{2} + \frac{NB \cdot BM}{2} + \frac{CD \cdot CM}{2} \right) = 63 \text{ cm}^2.$$

d) Fie $OP \perp AM$, $P \in AM$. $VO \perp (ABC)$, $OP \perp AM$, $OP, AM \subset (ABC)$ conform **teoremei celor trei perpendiculare** rezultă că $VP \perp AM$. Cum $(VAM) \cap (ABC) = AM$ şi $OP \perp AM$, $VP \perp AM$, $OP \subset (ABC)$ şi $VM \subset (VAM)$ rezultă că unghiul plan corespunzător diedrului format de planele (VAM) şi (ABC) este $\sphericalangle OPV$. Fie $OM \cap AD = \{M\}$, deci $MM' \perp AD$ şi $\Delta OPM \sim \Delta AM'M$ (u.u.), de unde $\frac{OP}{AM'} = \frac{OM}{AM}$ şi $OP = \frac{AM' \cdot OM}{AM} = \frac{6 \cdot 6}{6\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$. Deci

$$\text{tg}(\sphericalangle OPV) = \frac{VO}{OP} = 8 \cdot \frac{5}{6\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{3}.$$

VARIANTA 10

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	5502	8	40	–2	20	60	60	B	D	D	B

III. 13. a) Numărul cazurilor posibile este egal cu $12 + 26 + 36 = 74$, iar numărul cazurilor favorabile este egal cu 26. Probabilitatea este egală cu $\frac{26}{74} = \frac{13}{37}$.

b) Cel mai mic număr de bile este egal cu $9 + 9 + 9 + 1 = 28$. **(principiul cutiei)**

Scanned with OKEN Scanner

14. a) Cum $f(0)=-4$ şi $f(2)=0$, atunci punctele $A(0;-4)$ şi $B(2;0)$ sunt situate pe graficul funcţiei, ele reprezentând intersecţiile graficului cu axele de coordonate. **(fig.1)**

b) Tangenta unghiului este egală cu $\frac{OB}{OA}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

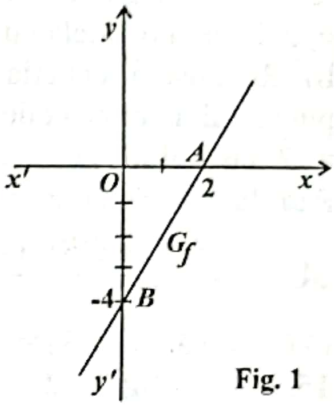


Fig. 1

c) Dacă $\frac{f(a)}{a+1}\in\mathbb{Z}$ atunci $\frac{2a-4}{a+1}\in\mathbb{Z}$ şi $a+1 \mid 2a-4$, dar cum $a+1 \mid 2a+2$, atunci $a+1 \mid 6$, de unde $a+1\in\{-6;-3;-2;-1;1;2;3;6\}$, iar $a\in\{-7;-4;-3;-2;0;1;2;5\}$.

15. a) Vezi **figura 2.**

b) Formula $\mathcal{A}_t=\mathcal{A}_l+2\mathcal{A}_b$ ne conduce la $\mathcal{A}_t=4AB\cdot AA'+2AB^2=$
$=4\cdot 6\sqrt{2}\cdot 6+2\cdot 2\cdot 36=144\left(1+\sqrt{2}\right)$ cm^2.

c) Fie $\{O\}=AC\cap BD$. Avem $OF=CF-OC$ şi $OE=AE-OA$. Cum $OA=OC$ rezultă că $OF=OE$, dar $OD=OB$ (diagonalele pătratului se înjumătăţesc), deci în patrulaterul $BEDF$ diagonalele se înjumătăţesc şi sunt perpendiculare prin urmare este romb. **(fig.2)**

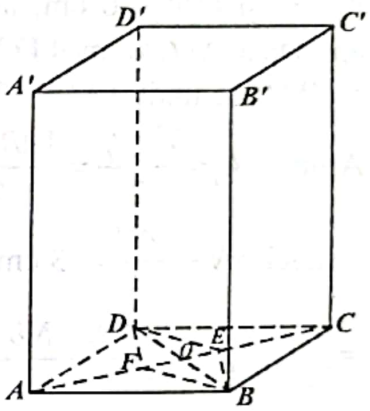


Fig. 2

d) Avem $CD\perp DD'$ şi $DD'\perp DF$ pentru că $DD'\perp(ABC)$ şi $DF\subset(ABC)$. Dar $(C'CD)\cap(D'DF)=DD'$, deci unghiul plan corespunzător diedrului format de planele $(C'CD)$ şi $(D'DF)$ este unghiul $\sphericalangle FDC$. Triunghiul DCF este isoscel cu $m(\sphericalangle DCF)=45°$

deci $m(\sphericalangle FDC)=\frac{180°-45°}{2}=\frac{135°}{2}=67°30'$.

VARIANTA 11

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
49	$2x$	$\frac{7}{6}$	56	60	30	$9\sqrt{3}$	5	D	C	B	B

III. 13. a) Din teorema împărţirii cu rest avem: $n=9c_1+3$, $n=18c_2+3$, $n=27c_3+3$, deci $n-3$ este un multiplu comun pentru 9, 18, 27. Câturile fiind nenule şi cum trebuie aflat cel mai mic număr rezultă $n-3=[9,18,27]=54$ de unde $n-3=54$, deci $n=57$.

b) Deoarece c.m.m.m.c. al lui $n-3$ este 54 implică $n-3=54p$, $p\in\mathbb{N}^*$ de unde $n=54p+3$. Dar $100<n<250$, de unde rezultă că $100<54p+3<250$. Pentru $p=1$ avem $n=57$ (nu convine), $p=2$ avem $n=111$, $p=3$ avem $n=165$, $p=4$ avem $n=219$, $p=5$ avem $n=273$ (nu convine). Numerele căutate sunt: 111, 165 şi 219.

14.a) Deoarece $A(-1,-5)$ şi $B(2,1)$ aparţin graficului funcţiei f rezultă că $f(-1)=-5$ şi $f(2)=1$ de unde avem următorul sistem: $\begin{cases}-a+b=-5\\2a+b=1\end{cases}$ cu soluţia $\begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}$ şi obţinem $f(x)=2x-3$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Calculăm valorile funcției în capetele intervalului: $f(-1) = -5$ și $f(4) = 5$, iar reprezentarea grafică este segmentul $[AC]$ unde $A(-1,-5)$ și $C(4,5)$. **(fig. 1)**

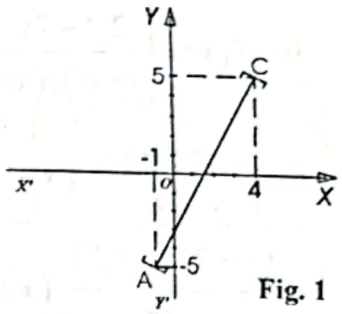


Fig. 1

c) Dacă $x = y$ avem $x = f(x)$ de unde $2x - 3 = x$ deci $x = 3$ și găsim punctul $M(3,3)$.

15. a) Vezi **figura 2.**

b) $V = AB \cdot BC \cdot AA' = 20 \cdot 16 \cdot 15 = 4800 \text{ cm}^3$.

c) Fie $CM \perp DC'$ **(fig.2)**. Deoarece $BC \perp (CC'D)$, $CM \perp DC'$, cu $CM, DC' \subset (CC'D)$ conform **teoremei celor trei perpendiculare** avem $BM \perp DC'$. În triunghiul DCC' dreptunghic în C aplicând **teorema lui Pitagora** obținem: $DC'^2 = DC^2 + CC'^2 = 15^2 + 20^2 = 625$, de unde $DC' = 25$ cm. CM fiind înălțime în acest triunghi rezultă că $CM = \frac{CD \cdot CC'}{DC'} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12$ cm.

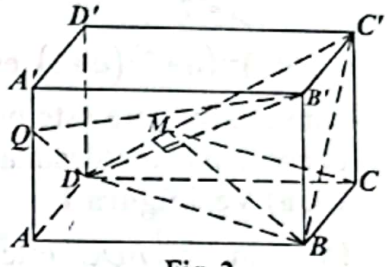


Fig. 2

Din triunghiul dreptunghic BCM rezultă conform **teoremei lui Pitagora** că $BM^2 = BC^2 + CM^2 = 256 + 144 = 400$, de unde $BM = 20$ cm.

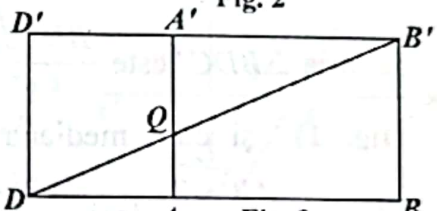


Fig. 3

d) Perimetrul $\Delta DQB'$ este $B'D + DQ + QB'$. $B'D$ fiind diagonala paralelipipedului rezultă că $B'D = \sqrt{881}$ cm deci este constantă, de unde $DQ + QB'$ este minimă. Desfășurăm în plan fețele $ABB'A'$ și $ADD'A'$ **(fig. 3)** și obținem dreptunghiul $DBB'D'$. Observăm că suma $DQ + QB'$ este minimă dacă punctele D, Q și B' sunt coliniare. În triunghiul DBB' cu $AQ \parallel BB'$ rezultă conform **teoremei fundamentale a asemănării** că $\triangle DAQ \sim \triangle DBB'$ de unde $\frac{DA}{DB} = \frac{AQ}{BB'}$ și prin înlocuire $\frac{16}{36} = \frac{AQ}{15}$, deci $AQ = \frac{16 \cdot 15}{36} = \frac{20}{3}$ cm.

VARIANTA 12

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
77	4	a	-2	$9\sqrt{3}$	16	10	4	D	C	C	B

III. 13. Notând cu x suma lui Radu și cu y suma Alexandrei avem următorul sistem:

$\begin{cases} x + y = 10 \\ x + 1 = y - 1 - 5 \end{cases}$ adică $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = -7 \end{cases}$ cu soluția $\begin{cases} x = 1,5 \\ y = 8,5 \end{cases}$. Deci Radu are 1,5 lei și Alexandra 8,5 lei.

a) Prețul cărții este $1,5 + 1 = 2,5$ lei sau $8,5 - 6 = 2,5$ lei.

b) Suma Alexandrei este 8,5 lei.

14. a) $(x-3)(x-7) = x^2 - 7x - 3x + 21 = x^2 - 10x + 21$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $F(x)=\left[\dfrac{2x^2-7x-17}{(x-3)(x-7)}-\overset{x-3)}{\dfrac{x+1}{x-7}}\right]\cdot(x^2-9)=\dfrac{2x^2-7x-17-x^2-x+3x+3}{\cancel{(x-3)}(x-7)}\cdot\cancel{(x-3)}(x+3)=$

$=\dfrac{x^2-5x-14}{x-7}\cdot(x+3)=\dfrac{x^2-7x+2x-14}{x-7}\cdot(x+3)=\dfrac{x(x-7)+2(x-7)}{x-7}\cdot(x+3)=$

$=\dfrac{\cancel{(x-7)}(x+2)}{\cancel{x-7}}\cdot(x+3)=(x+2)(x+3)$.

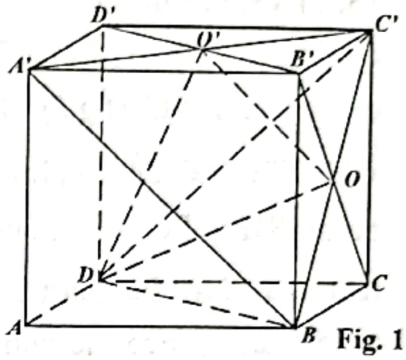


Fig. 1

c) $F(a)=(a+2)(a+3)$ este produsul a două numere naturale consecutive care este număr par pentru că din două numere consecutive întotdeauna unul este par.

15. a) Vezi **figura 1.**

b) Triunghiul BDC' este echilateral cu latura egală cu $AB\sqrt{2}$, iar aria $\Delta BDC'$ este $\dfrac{BD^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{2AB^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{2}$. În triunghiul BDC', DO este mediană **(fig. 1)** şi cum mediana împarte triunghiul în două triunghiuri echivalente, atunci $A_{\triangle DBO}=\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}$ deci $\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$ de unde obţinem $AB=2$ cm.

c) Piramida $OADD'A'$ este o piramidă patrulateră regulată pentru că are baza un pătrat şi muchiile laterale sunt congruente între ele (rezultă din congruenţa triunghiurilor dreptunghice ABO, DCO, $A'B'O$, $D'C'O$ conform cazului de congruenţă catetă-catetă), iar înălţimea ei este egală cu muchia cubului.

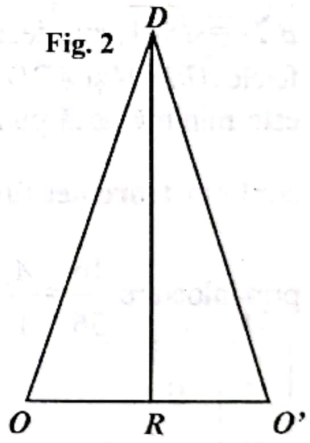


Fig. 2

$V_{piramidei}=\dfrac{A_b\cdot h}{3}=\dfrac{AB^2\cdot 2}{3}=\dfrac{2^2\cdot 2}{3}=\dfrac{8}{3}$ cm^3.

d) Fie O' centrul bazei $A'B'C'D'$. Deoarece OO' este linie mijlocie în triunghiul $A'BC'$ avem $OO' \parallel A'B$, de unde rezultă că $m\left(\widehat{A'B,DO}\right)=$

$=m\left(\widehat{OO',DO}\right)=m\left(\widehat{DOO'}\right)$. Din triunghiul echilateral DBC' calculăm înălţimea DO: $DO=\dfrac{DB\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$ cm, iar $OO'=\dfrac{A'B}{2}=\sqrt{2}$ cm. În triunghiul DOO' care este isoscel (rezultă din congruenţa triunghiurilor drptunghice DCO şi $DD'O'$ conform cazului catetă – catetă), construim înălţimea DR **(fig. 2)** şi în triunghiul dreptunghic DOR avem $\cos\left(\widehat{DOR}\right)=\dfrac{RO}{DO}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}:\sqrt{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 13

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
29	$\frac{21}{24}$	3	$\frac{2}{3}$	74	28	63	94	B	D	D	C

III. 13. a) $M_{ponderată}=\dfrac{a_1\cdot p_1+a_2\cdot p_2+a_3\cdot p_3+\ldots+a_7\cdot p_7}{p_1+p_2+p_3+\ldots+p_7}$ unde p_n reprezintă numărul de elevi şi a_n notele obţinute, $n\in\{1,2,3,\ldots,7\}$, de unde

$$M_{ponderată}=\frac{10\cdot 2+9\cdot 3+8\cdot 6+7\cdot 7+6\cdot 5+5\cdot 1+4\cdot 1}{2+3+6+7+5+1+1}=\frac{183}{25}=7{,}32.$$

b) Notând cu x nota elevului avem: $\dfrac{179+x}{25}=7{,}40$ de unde $179+x=185$ şi $x=6$.

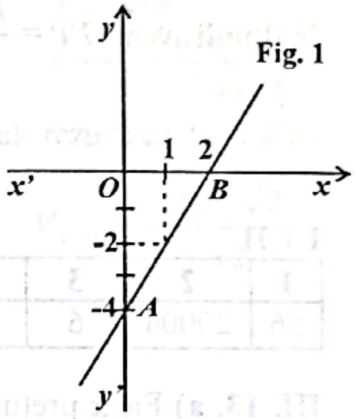


Fig. 1

14. a) $f(1)=a+b, f(4)=4a+b, f(2)=2a+b, f(3)=3a+b$. Egalitatea din enunţ devine: $a+b+4a+b=2a+b+3a+b$ de unde $5a+2b=5a+2b$, cea ce este evident.

b) Funcţia este $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-4$. Cum $A(0,-4)$ şi $B(2,0)$ sunt situate pe graficul funcţiei, atunci aceasta este dreapta AB. **(fig. 1)**

c) Dacă $M(2m+1, m^2+1)$ aparţine graficului funcţiei avem $f(2m+1)=m^2+1$, adică $2(2m+1)-4=m^2+1$, de unde $m^2-4m+3=0$. Rezolvăm ecuaţia de gradul al doilea:

$$\Delta=b^2-4ac=4,\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4\pm 2}{2}\ \text{şi}\ x_1=3, x_2=1.$$

15.a) Vezi **figura 2.**

b) $A_t=A_l+A_b+A_B$; $A_B=\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3}$ cm², $A_b=\dfrac{A'B'^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}$ cm²; $A_l=\dfrac{(P_B+P_b)\cdot a_t}{2}$;

Cu notaţiile din figură avem: $OM=\dfrac{AB\sqrt{3}}{6}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm, $O'M'=\dfrac{A'B'\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}$ cm,

$MN=OM-O'M'=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ cm, unde $M'N\perp OM, N\in(OM)$. În $\Delta MM'N$ dreptunghic, aplicând **teorema lui Pitagora** obţinem $M'M=\sqrt{MN^2+M'N^2}=\sqrt{\dfrac{147}{9}}=$

$=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ cm, deci $A_l=\dfrac{(24+18)\dfrac{7\sqrt{3}}{3}}{2}=49\sqrt{3}$ cm².

Scanned with OKEN Scanner

c) Deoarece piramidele sunt asemenea avem $\frac{VO'}{VO}=\frac{A'B'}{AB}$, adică $\frac{VO'}{VO'+4}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ de unde $4VO'=3VO'+12$ şi $VO'=12$ cm şi $VO=16$ cm. Rezultă $V_{piramida}=\frac{A_b\cdot VO}{3}=\frac{256\sqrt{3}}{3}$ cm^3.

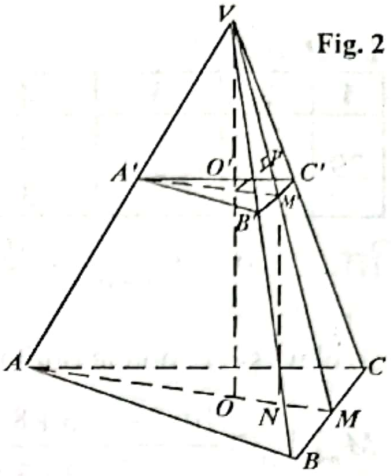


Fig. 2

d) Construim $O'P\perp VM$ **(fig. 2)** şi rezultă că $d(O',(BCC'))=O'P$ pentru că $O'P\perp B'C'$. În $\Delta VO'M'$ conform **teoremei lui Pitagora** $VM'=7\sqrt{3}$, iar conform celei de **a doua teoreme a înălţimii** avem $O'P=\frac{VO'\cdot O'M'}{VM'}=\frac{12\cdot\sqrt{3}}{7\sqrt{3}}=\frac{12}{7}$ cm.

VARIANTA 14

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
56	20004	6	−2	10	8	180	16	B	C	D	A

III. 13. a) Fie x preţul iniţial al obiectului. Avem următoarea ecuaţie: $x\cdot\frac{12\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{0}}\cdot\frac{11\cancel{0}}{100}=264$ de unde $x\cdot 132=26400$, deci $x=200$ lei.

b) Preţul se măreşte cu 64 lei şi vom afla cât la sută reprezintă 64 din 200: $\frac{p}{100}\cdot 200=64$ rezultă $p=32$.

14. a) $E(x)=\left[\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2+2\cdot\frac{x-2}{x+2}+1\right]\cdot\frac{x+2}{2x}=\left(\frac{x-2}{x+2}+1\right)^2\cdot\frac{x+2}{2x}=\left(\frac{x-2+x+2}{x+2}\right)^2\cdot\frac{x+2}{2x}=$

$=\frac{(2x)^{\cancel{2}}}{(x+2)^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{x+2}}{\cancel{2x}}=\frac{2x}{x+2}$.

b) $\frac{1}{n}\cdot E(n)=\frac{\cancel{1}}{\cancel{n}}\cdot\frac{2\cancel{n}}{n+2}=\frac{2}{n+2}\in\mathbb{Z}$ de unde $n+2$ este un divizor al lui 2 adică -2, -1, 1 sau 2. Înlocuind obţinem $n+2=1$ implică $n=-1$, $n+2=-1$ implică $n=-3$, $n+2=2$ implică $n=0$ (nu convine), $n+2=-2$ implică $n=-4$. Deci $n\in\{-1,-3,-4\}$.

c) $E(x)\in\mathbb{Z}$ rezultă $\frac{2x}{x+2}\in\mathbb{Z}$. $\frac{2x+4-4}{x+2}=\frac{2x+4}{x+2}-\frac{4}{x+2}=\frac{2\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}-\frac{4}{x+2}=2-\frac{4}{x+2}$.

Cum $2\in\mathbb{Z}$ rezultă $\frac{4}{x+2}\in\mathbb{Z}$, deci $x+2$ este un divizor al lui 4, adică ±1, ±2 sau ±4.

Înlocuind obţinem: $x+2=1$ implică $x=-1$, $x+2=-1$ implică $x=-3$, $x+2=2$

Scanned with OKEN Scanner

implică $x=0$ (nu convine), $x+2=-2$ implică $x=-4$, $x+2=4$ implică $x=2$, $x+2=-4$ implică $x=-6$, deci $x\in\{-6,-4,-3,-1,2\}$.

15. a) Vezi **figura 1**.

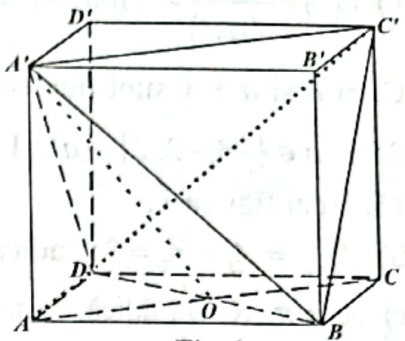


Fig. 1

b) $\Delta A'BD$ este echilateral cu latura $BD=AB\sqrt{2}=6\sqrt{2}$ cm, iar aria lui este $\frac{BD^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\left(6\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{36\cdot2\sqrt{3}}{4}=18\sqrt{3}$ cm^2.

c) $AC'\cap A'O=\{P\}$ **(fig. 1)** deoarece dreptele sunt coplanare fiind conținute în planul ACC'. Observăm că $\Delta AA'C'\sim\Delta OAA'$ **(fig. 2)** (pentru că sunt dreptunghice și $\frac{AA'}{AO}=\frac{A'C'}{AA'}$ deoarece $\frac{6}{3\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{6}$ evident) de unde $\sphericalangle A'_1\equiv\sphericalangle C'_1$. Dar $m\left(\sphericalangle C'_1\right)+m\left(\sphericalangle A_1\right)=90°$

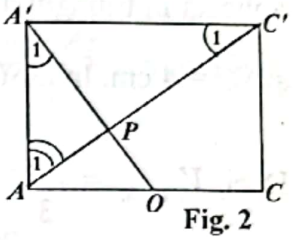


Fig. 2

rezultă $m\left(\sphericalangle A'_1\right)+m\left(\sphericalangle A_1\right)=90^0$ și în $\Delta AA'P$ avem $m(\sphericalangle P)=90^0$ de unde rezultă că $AC'\perp A'O$.

d) Piramida $C'A'BD$ este un tetraedru regulat cu muchia $6\sqrt{2}$ cm, deci $V_{A'BDC'}=\frac{BD^3\sqrt{2}}{12}=$

$=\frac{6\sqrt{2}\cdot72\sqrt{2}}{12}=72$ cm^3.

VARIANTA 15

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
144	24	9	2	3000	26	100	500	A	D	D	C

III. 13. a) Fie m numărul microscoapelor și obținem ecuația: $2(m-1)+1=3(m-4)$ de unde $m=11$.

b) Numărul elevilor este: $2(11-1)+1=21$.

14.a) $E(x)=\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)}}\cdot\frac{\cancel{2(x+1)}3(x-1)}{2x^2-x+4x-2-x^2-3x+1}=\frac{1}{x}\cdot\frac{6(x-1)}{x^2-1}=\frac{\cancel{6(x-1)}}{x(x+1)\cancel{(x-1)}}=\frac{6}{x(x+1)}$.

b) $3+E(2)+E(3)+\ldots+E(100)=3+\frac{6}{2\cdot3}+\frac{6}{3\cdot4}\ldots+\frac{6}{100\cdot101}$ și cum $3=\frac{6}{1\cdot2}$ scriem suma astfel $\frac{6}{1\cdot2}+\frac{6}{2\cdot3}\ldots+\frac{6}{100\cdot101}=$

$=6\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}\ldots+\frac{1}{100\cdot101}\right)=6\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)=$

$=6\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{600}{101}$.

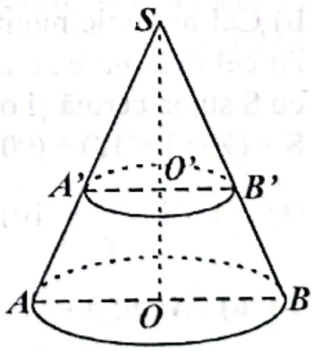


Fig. 1

Scanned with OKEN Scanner

c) $E(a)=\frac{6}{a(a+1)}\in\mathbb{Z}$ implică $a(a+1)$ este un divizor al lui 6, adică -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6.

Cum a şi $a+1$ sunt numere consecutive avem $a(a+1)\in\{1\cdot 2, 2\cdot 3, -2\cdot(-1), -3\cdot(-2)\}$, deci $a\in\{-3,-2,2\}$ ($a=1$ nu convine).

15. Vezi **figura 1.**

b) $A_{bazei}=A_t-A_l=9\pi$ adică $\pi\cdot OB^2=9\cdot\pi$ de unde OB=3cm.

c) $A_l=\pi\cdot R\cdot G$, adică $3\cdot\pi\cdot G=15\cdot\pi$ implică $G=5$ cm şi conform **teoremei lui Pitagora** aplicată în triunghiul dreptunghic SOB avem $SB^2=SO^2+OB^2$, de unde $SO^2=25-9=16$ şi $SO=4$ cm. În ΔSOB, $O'B'$ este linie mijlocie **(fig. 1)** de unde $O'B'=\frac{3}{2}$ cm, $h=OO'$=2 cm.

Deci, $V_{trunchi}=\frac{\pi h}{3}\cdot\left(R^2+r^2+Rr\right)=\frac{2\pi}{3}\left(9+\frac{9}{4}+\frac{9}{2}\right)=\frac{21\pi}{2}$ cm^3.

d) $\Delta SOB\sim\Delta STC$ (unghi-unghi) **(fig. 2)**. Rezultă proporţionalitatea laturilor: $\frac{SC}{SB}=\frac{CT}{OB}$, unde $CO=CT=r$ implică $\frac{4-r}{5}=\frac{r}{3}$ de unde $5r=12-3r$ şi $r=\frac{3}{2}$ cm.

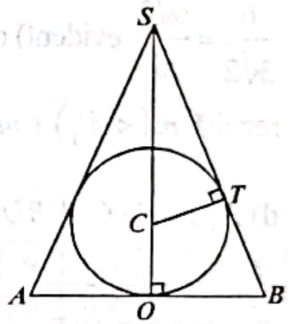


Fig. 2

VARIANTA 16

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
235	3, 7	$\frac{2}{5}$	340	32	60	$5\sqrt{2}$	200	D	B	A	B

III. 13.a) Notăm cu x numărul căutat şi din teorema împărţirii cu rest avem: $x=15\cdot c_1+13$; $x=30\cdot c_2+13$; $x=45\cdot c_3+13$, unde c_1, c_2, c_3 sunt câturile care se obţin la cele trei împărţiri. Deci: $x-13=15\cdot c_1$; $x-13=30\cdot c_2$; $x-13=45\cdot c_3$, adică $x-13$ este un multiplu comun al numerelor 15, 30 şi 45. Cum x este cel mai mic număr natural cu această proprietate şi câturile sunt nenule, rezultă că $x-13$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor 15, 30 şi 45. Obţinem $x-13=90$ de unde $x=103$.

b) Cel mai mic număr natural de trei cifre cu această proprietate este $103=90\cdot 1+13$, iar cel mai mare număr de trei cifre cu această proprietate este $913=90\cdot 10+13$. Notăm. cu S suma cerută şi obţinem:

$S=(90\cdot 1+13)+(90\cdot 2+13)+\ldots+(90\cdot 10+13)=(90\cdot 1+90\cdot 2+\ldots+90\cdot 10)+13\cdot 10=$

$=90(1+2+\ldots+10)+130=90\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+130=5080.$

14. a) Avem; $f(-3)=2\cdot(-3)-2=-8$; $g(-3)=-\frac{2}{3}\cdot(-3)+2=2+2=4$.

Deci $f(-3)+g(-3)=-8+4=-4$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Reprezentăm graficele celor două funcții aflând coordonatele punctelor de intersecție ale acestora cu axele sistemului de coordonate. Pentru $x = 0$ rezultă $f(0) = -2$, deci avem $A(0; -2)$. Din $f(x) = 0$ obținem $2x - 2 = 0$, adică $x = 1$, deci avem $B(1; 0)$. Pentru $x = 0$ rezultă $g(0) = -\frac{2}{3} \cdot 0 + 2 = 2$ deci avem $C(0; 2)$. Din $g(x) = 0$ obținem $-\frac{2}{3} \cdot x + 2 = 0$, adică $x = 3$, deci avem $D(3; 0)$.

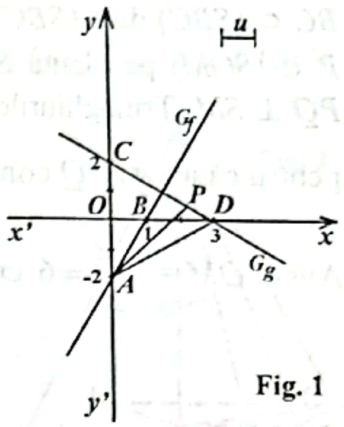


Fig. 1

c) Cum graficul funcției f intersectează axa ordonatelor în punctul $A(0; -2)$, avem de aflat distanța de la punctul A la dreapta CD. (**fig. 1**)

Fie $AP \perp CD$ și avem: $\mathcal{A}_{\Delta ADC} = \frac{AC \cdot DO}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$, dar $\mathcal{A}_{\Delta ADC} = \frac{DC \cdot AP}{2}$, înlocuind, obținem: $6 = \frac{\sqrt{13} \cdot AP}{2}$, de unde $AP = \frac{12\sqrt{13}}{13}$.

În ΔCOD cu $m(\sphericalangle COD) = 90°$ aplicăm teorema lui **Pitagora** și obținem $CD^2 = CO^2 + OD^2 = 2^2 + 3^2 = 13$, de unde $CD = \sqrt{13}$.

15. a) Vezi **figura 2.**

b) Avem $\mathcal{V}_{SABCD} = \frac{\mathcal{A}_{ABCD} \cdot SO}{3} = \frac{12^2 \cdot 6\sqrt{2}}{3} = 288\sqrt{2}$ cm^3.

c) Cum $BO = \frac{l\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ cm, aplicăm **teorema lui Pitagora** în ΔSOB cu $m(\sphericalangle SOB) = 90°$ și obținem: $SB^2 = SO^2 + OB^2 = 72 + 72$, deci $SB = \sqrt{144} = 12$ cm. (**fig. 2**)

Deoarece $SB = AB = 12$ rezultă că fețele laterale ale piramidei sunt triunghiuri echilaterale. Fie $AN \perp SB$, rezultă că $CN \perp SB$. Cum $(SAB) \cap (SBC) = SB$, $AN \perp SB$, $AN \subset (SAB)$, $CN \perp SB$, $CN \subset (SBC)$ rezultă că unghiul format din fețele laterale SAB și SBC este unghiul format de dreptele AN și CN.

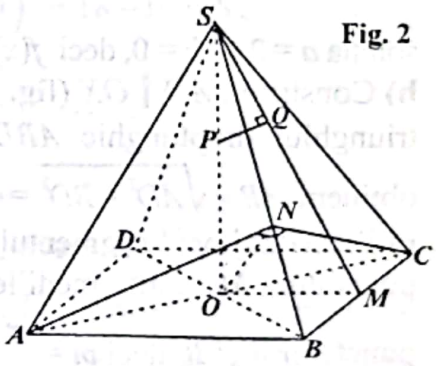


Fig. 2

Avem $AN = CN = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm (înălțimi).

$AC = l\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ cm (diagonala pătratului).

Deoarece $SB \perp AN$, $SB \perp CN$ implică $SB \perp (NAC)$, deci $SB \perp NO$ pentru că $NO \subset (NAC)$, adică $ON \perp SB$. În triunghiul SOB, dreptunghic, ON este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei și deci avem: $ON = \frac{SO \cdot OB}{SB} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{12} = 6$ cm.

Avem $\mathcal{A}_{\Delta NAC} = \frac{AC \cdot NO}{2} = \frac{12\sqrt{2} \cdot 6}{2} = 36\sqrt{2}$ cm^2, dar $\mathcal{A}_{\Delta NAC} = \frac{NA \cdot NC \cdot \sin \widehat{ANC}}{2}$, de unde rezultă $36\sqrt{2} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \sin \widehat{ANC}}{2}$, deci $\sin \widehat{ANC} = \frac{36\sqrt{2}}{54} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

d) Avem $SO \perp (ABC)$, construim $OM \perp BC$ și obținem conform **teoremei celor trei perpendiculare** că $SM \perp BC$. Deoarece $BC \perp OM$, $BC \perp SM$ rezultă că $BC \perp (SOM)$, dar

Scanned with OKEN Scanner

$BC \subset (SBC)$ deci $(SBC) \perp (SOM)$ adică $(SOM) \perp (SBC)$ și deci perpendiculara din punctul $P \in (SOM)$ pe planul SBC intersectează dreapta de intersecție a celor două plane, SM. Fie $PQ \perp SM$. Triunghiurile SQP și SOM sunt asemenea conform cazului de asemănare (l.u.l.) pentru că au $\sphericalangle PSQ$ comun și $\sphericalangle Q \equiv \sphericalangle SOM\ (= 90°)$, deci rezultă: $\frac{SQ}{SO} = \frac{QP}{OM} = \frac{SP}{SM}$.

Avem $OM = \frac{AB}{2} = 6$ cm, $SM = CN = 6\sqrt{3}$ cm și din $\frac{QP}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}$ rezultă $QP = \sqrt{6}$ cm.

VARIANTA 17

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
310	50	1	3	15	60	96	84	B	C	D	C

III. 13. a) $\overline{xy} \in \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$.

b) Descompunând numerele de sub radical în baza 10 avem $\sqrt{\overline{ab} + \overline{ba}} = \sqrt{10a + b + 10b + a} = \sqrt{11a + 11b} = \sqrt{11(a+b)}$. Deoarece $\sqrt{11(a+b)}$ este natural trebuie ca $a + b = 11k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$. Pentru că a și b sunt cifre rezultă $a + b = 11$ de unde $\overline{ab} \in \{29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92\}$. Cum $\overline{ab}$ trebuie să fie cel mai mic avem $\overline{ab} = 29$.

14. a) Deoarece punctele $A(1,2)$ și $B(4,8)$ aparțin graficului funcției avem $f(1) = 2$ și $f(4) = 8$; cum $f(x) = ax + b$, prin înlocuire rezultă sistemul $\begin{cases} a+b=2 \\ 4a+b=8 \end{cases}$ cu soluția $a = 2$ și $b = 0$, deci $f(x) = 2x$.

b) Construim $AD \parallel OX$ **(fig. 1)**. Avem $AD = 3$ și $BD = 6$. Din triunghiul dreptunghic ABD aplicând teorema lui Pitagora obținem $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$ unități de lungime.

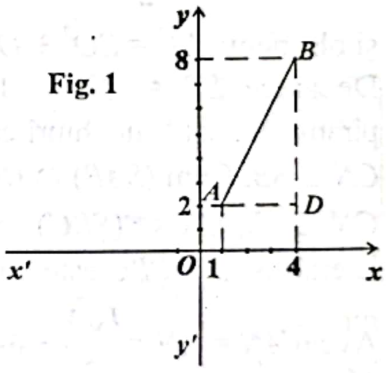


Fig. 1

c) Fie M mijlocul segmentului $[AB]$ și $M(m, n)$. Coordonatele punctului M sunt mediile aritmetice ale coordonatelor punctelor A și B, deci $m = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+4}{2} = = \frac{5}{2}$;

$n = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+8}{2} = 5$ implică $M\left(\frac{5}{2}, 5\right)$.

15. a) Vezi **figura 2.**

b) OM este apotema bazei de unde $OM = \frac{AB}{2} = 6$ cm. În triunghiul VOM dreptunghic în O aplicând **teorema lui Pitagora** obținem: $VM^2 = VO^2 + OM^2 = 6^2 + 6^2 = 72$ implică $VM = 6\sqrt{2}$ cm. $A_l = \frac{P_B \cdot a_p}{2} = \frac{P_B \cdot OM}{2} = \frac{48 \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 144\sqrt{2}$ cm^2.

Scanned with OKEN Scanner

c) Proiecția dreptei CV pe planul bazei este dreapta CO pentru că $VO \perp (ABC)$ și $C \in (ABC)$. Rezultă că măsura unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei este măsura unghiului VCO;

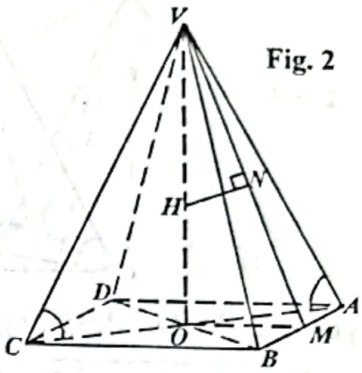


Fig. 2

$OC = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ cm. Din triunghiul dreptunghic VOC calculăm ipotenuza VC cu **teorema lui Pitagora**: $VC = \sqrt{VO^2 + OC^2} = \sqrt{36+72} = 6\sqrt{3}$ cm, iar $\cos(\sphericalangle VCO) = \frac{OC}{VC} = \frac{6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

d) Construim $HN \perp VM$ (**fig. 2**); dar $HN \perp AB$ pentru că $AB \perp (VOM)$ de unde rezultă că $HN \perp (VAB)$. $\Delta VHN \sim \Delta VOM$ (u.u.) $\Rightarrow \frac{VH}{VM} = \frac{HN}{OM} \Rightarrow \frac{3}{6\sqrt{2}} = \frac{HN}{6}$ implică $HN = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm.

VARIANTA 18

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	15	162	$\frac{1}{6}$	32	12	288	70	D	C	B	C

III. 13. a) $\left(\sqrt{900} : \sqrt{50}\right)^2 - \left(3\sqrt{10} - 2\sqrt{10}\right)^2 = \left(\sqrt{18}\right)^2 - \left(\sqrt{10}\right)^2 = 18 - 10 = 8$.

b) $S = \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{2}{3}} + \cancel{\frac{3}{4}} + \ldots + \frac{2006}{2007} - 1 \cancel{- \frac{1}{2}} \cancel{- \frac{2}{3}} \cancel{- \frac{3}{4}} - \ldots - \frac{2006}{2007} = -1$.

14. a) $|x-1| = 1$ echivalent $x - 1 = \pm 1$, de unde $x = 2$ sau $x = 0$.

b) $|x| \le 2$ echivalent cu $-2 \le x \le 2$ și cum x este număr întreg avem: $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

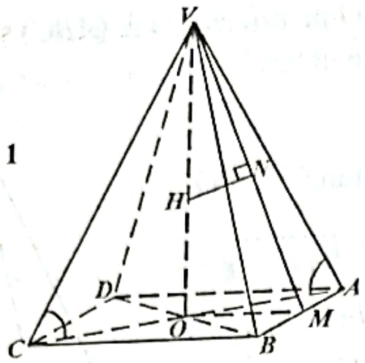
c) Conform punctului a) din prima relație avem $x = 2$ sau $x = 0$. Dacă $x = 0$ avem $|-y| < 2$ implică $y \in \{0, \pm 1\}$ de unde perechile (0,0), (0,−1), (0,1), iar pentru $x = 2$ avem $|2-y| < 2$ de unde $-2 < 2 - y < 2$, adică $4 > y > 0$, $y \in \mathbb{Z}$ deci $y \in \{1, 2, 3\}$ și perechile (2,1), (2,2), (2,3).

15. a) Vezi **figura 1.**

b) $OM = a_B$ (apotema bazei) implică $OM = \frac{AB}{2} = 6$ cm. În triunghiul VOM dreptunghic în O (**fig. 1**) aplicând **teorema lui Pitagora** obținem: $VM^2 = VO^2 + OM^2 = 6^2 + 8^2 = 100$ de unde $VM = a_p = 10$ cm, deci $A_l = \frac{P_B \cdot a_p}{2} = \frac{48 \cdot 10}{2} = 240$ cm^2, $A_B = AB^2 = 144$ cm^2, $A_t = A_l \cdot A_B = 240 + 144 = 384$ cm^2.

Scanned with OKEN Scanner

Fig. 1



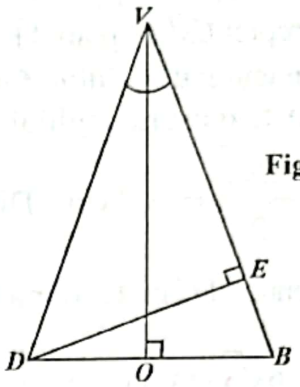


Fig. 2

c) Din ΔVMB dreptunghic în M conform **teoremei lui Pitagora** avem: $VB^2 = VM^2 + MB^2$ deci $VB = \sqrt{100+36} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$ cm. $BD = AB\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$. În ΔVBD isoscel **(fig. 2)** VO şi DE sunt înălţimi de unde $VB \cdot DE = BD \cdot VO$, implică $2\sqrt{34} \cdot DE = 12\sqrt{2} \cdot 8$ adică $DE = \frac{96\sqrt{2}}{2\sqrt{34}} = \frac{48\sqrt{17}}{17}$ cm. În triunghiul dreptunghic DEV, $\sin(\sphericalangle V) = \frac{DE}{VD} =$

$= \frac{48\sqrt{17}}{17} : 2\sqrt{34} = \frac{12\sqrt{2}}{17}$.

d) Construim $HN \perp VM$ **(fig. 1)**; dar $HN \perp AB$ pentru că $AB \perp (VOM)$ de unde rezultă că $HN \perp (VAB)$. Fie $OH = NH = x$. Din faptul că $\Delta VOM \sim \Delta VNH$ (u.u.) obţinem $\frac{VH}{VM} = \frac{HN}{OM}$ de unde $\frac{8-x}{10} = \frac{x}{6}$ adică $x = 3$ şi $OH = 3$ cm.

VARIANTA 19

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20	x	4	1500	2	6	15	10	D	A	C	B

III. 13. a) Din enunţul problemei rezultă următorul sistem: $\begin{cases} a+b=156 \\ a+24=b-32 \end{cases}$ cu soluţia $a = 50, b = 106$.

b) $M_{ponderată} = \frac{a \cdot p_1 + b \cdot p_2}{p_1 + p_2} = \frac{50 \cdot 3 + 106 \cdot 2}{3+2} = 72,4$.

14. a) Calculând valorile funcţiei în punctele din domeniu obţinem $f(0) = -1$ adică $A(0, -1)$, $f(4) = 0$ adică $B(4, 0)$ şi $f(8) = 1$ adică $C(8, 1)$ deci reprezentarea grafică este formată din cele trei puncte **(fig. 1)**.

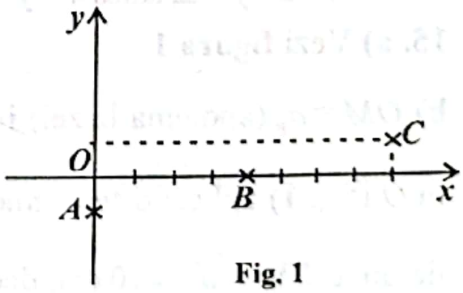


Fig. 1

b) Observăm că graficului lui f este format doar din punctele A, B, C deci numai N aparţine graficului fiind identic cu C.

Scanned with OKEN Scanner

c) Înlocuind $f(x)$ obținem $\frac{1}{4}x-1>2x-8$, adică $x-4>8x-32$ de unde $-7x>-28\,|\cdot(-1)$ implică $7x<28$ și $x<4$ cu soluția $x=0$ pentru că domeniul funcției are doar 3 valori și celelalte două nu convin.

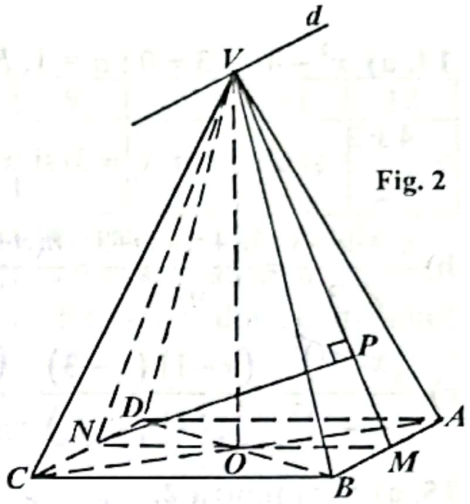


Fig. 2

15. a) Figura 2.

b) $A_l=4\cdot A_{\triangle VBA}=4\cdot\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=36\sqrt{3}$ cm^2 (pentru că fețele laterale sunt triunghiuri echilaterale).

c) În triunghiul VBD: $VB=VD=6$ cm și $BD=AB\sqrt{2}=$ $=6\sqrt{2}$ cm. $BD^2=\left(6\sqrt{2}\right)^2=72$, $VB^2=6^2=36$, $VD^2=6^2=36$.

Observăm că $BD^2=VB^2+VD^2$ de unde conform reciprocei teoremei lui Pitagora rezultă că triunghiul VBD este dreptunghic în V, de unde $VB\perp VD$.

d) Construim prin V o dreaptă d paralelă cu AB și CD **(fig. 2)**. Fiind paralelă cu ele este coplanară cu amândouă, deci $d=(VAB)\cap(VCD)$. Apotemele VM și VN fiind perpendiculare pe AB respectiv CD sunt perpendiculare pe dreapta d, de unde rezultă că unghiul plan asociat diedrului este unghiul MVN. Construim $NP\perp VM$ și includem unghiul MVN în triunghiul dreptunghic VNP. În triunghiul echilateral VAB, $VM=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$ cm și din triunghiul dreptunghic VOM conform **teoremei lui Pitagora** avem: $VO^2=VM^2-OM^2=27-9=18$ deci $VO=3\sqrt{2}$ cm. Exprimând aria triunghiului VMN calculăm pe NP: $VM\cdot NP=$ $=MN\cdot VO$ adică $3\sqrt{3}\cdot NP=6\cdot3\sqrt{2}$ deci $NP=2\sqrt{6}$ cm și din triunghiul VNP rezultă că $\sin(\sphericalangle NVP)=\frac{NP}{NV}=\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

VARIANTA 20

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	1,8	$6\sqrt{2}$	6	500	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	3	36	C	A	A	D

III. 13. a) Numărul de persoane cu vârsta cuprinsă între 18 și 40 de ani este $\frac{17}{100}\cdot200=34$.

b) Procentul persoanelor cu vârsta peste 60 de ani este 100% – (57% + 17% + 13%) = 13% iar numărul lor este $\frac{13}{100}\cdot200=26$. Probabilitatea este $\frac{\text{nr. cazurilor favorabile}}{\text{nr. cazurilor posibile}}=$ $=\frac{26}{200}=\frac{13}{100}$. Numărul cazurilor favorabile este 26, iar numărul cazurilor posibile 200.

Scanned with OKEN Scanner

14. a) $x^2-4x+3=0: a=1,\ b=-4,\ c=3,\ \Delta=b^2-4ac=16-12=4,\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=$

$=\dfrac{4\pm2}{2}$ şi obţinem $x_1=3$ şi $x_2=1$.

b) $\dfrac{n^2+4n+3}{n+3}=\dfrac{n^2+n+3n+3}{n+3}=\dfrac{n(n+1)+3(n+1)}{n+3}=\dfrac{(n+1)(n+3)}{n+3}=n+1\in\mathbb{N}.$

c) $\dfrac{\cancel{(x+2)^2}}{\cancel{(x-3)^2}}\cdot\dfrac{(x-1)\cancel{(x-3)}}{(x+1)\cancel{(x+3)}}\cdot\dfrac{\cancel{(x+3)}\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x+2)^2}}=\dfrac{x-1}{x+1}.$

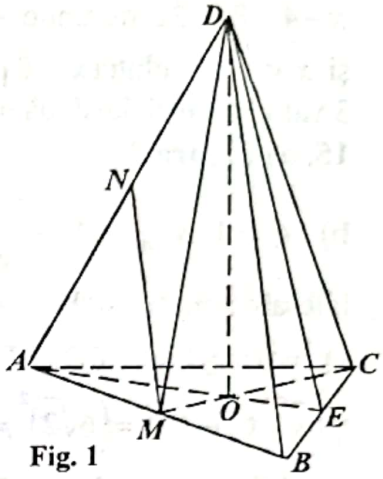


Fig. 1

15. a) Vezi **figura 2.**

b) $V=\dfrac{A_B\cdot h}{3}$, $A_B=\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{64\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

În triunghiul DOA dreptunghic în O **(fig. 1)**, avem $AD=5$ cm, $AO=\dfrac{AB\sqrt{3}}{3}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ cm şi aplicând **teorema lui Pitagora** rezultă că $DO^2=DA^2-AO^2=25-\dfrac{64\cdot3}{9}=\dfrac{33}{9}$ de unde $DO=\dfrac{\sqrt{33}}{3}$ cm.

$V=16\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{33}}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{16\cdot3\cdot\sqrt{11}}{3\cdot3}=\dfrac{16\sqrt{11}}{3}\ \text{cm}^3$.

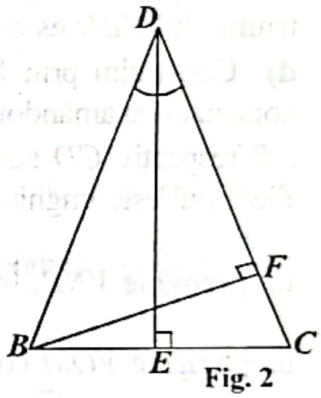


Fig. 2

c) Observăm că $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul ABD **(fig. 1)** deci, $MN \parallel DB$ de unde $\sin(\sphericalangle MN,CD)=\sin(\sphericalangle DB,CD)=\sin(\sphericalangle BDC)$ pe care îl includem în triunghiul BCD. Fie $DE\perp BC$ şi în triunghiul DEC aplicând **teorema lui Pitagora** rezultă $DE^2=DC^2-EC^2=25-16$ şi deci $DE=3$ cm. Construim $BF\perp DC$ pe care îl calculăm cu ajutorul ariei triunghiului BDC **(fig. 2)**: $DC\cdot BF=BC\cdot DE$ de unde $5\cdot BF=8\cdot3$ şi $BF=4{,}8$ cm. Obţinem $\sin(\sphericalangle BDC)=\dfrac{BF}{BD}=\dfrac{4{,}8}{5}=\dfrac{24}{25}$.

d) Lungimea proiecţiei lui (MN) pe planul (DBC) este egală cu $MN=2{,}5$ cm, pentru că $MN\parallel(DBC)$, fiind paralelă cu DB, care este inclusă în planul (DBC).

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 21

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
17	4	$\frac{11}{29}$	5	18	144	6	$\frac{16}{3}$	B	B	C	D

III.13.a) Două caiete și două cărți costă $2(1{,}8+6)=15{,}6$ și primește rest $50-15{,}6=34{,}4$ lei.

b) Dacă un colet conține cel puțin două cărți mai rămân $10-2=8$ produse în colet iar pentru a avea preț minim trebuie să fie caiete. Coletul conține 8 caiete și două cărți, adică are costul de $8\cdot 1{,}8+2\cdot 6=14{,}4+12=26{,}4$ lei.

14. a) Ecuația este echivalentă cu $9x^2=1$ și $x^2=\frac{1}{9}$, cu soluțiile $x\in\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}$.

b) Efectuând calculele $(x+1)(1-3x)=x-3x^2+1-3x=1-2x-3x^2$.

c) Scriem $E(x)=\frac{7x-3x^2}{(1-3x)(1+3x)}-\frac{3x}{(1-3x)(1+x)}\cdot\left[1+\frac{x(x+3)}{x+3}\right]=$

$=\frac{7x-3x^2}{(1-3x)(1+3x)}-\frac{3x}{(1-3x)(1+x)}\cdot(1+x)$ și atunci $E(x)=\frac{7x-3x^2}{(1-3x)(1+3x)}-\frac{3x}{1-3x}=$

$=\frac{7x-3x^2}{(1-3x)(1+3x)}-\frac{3x(1+3x)}{(1-3x)(1+3x)}=\frac{7x-3x^2-3x-9x^2}{(1-3x)(1+3x)}=\frac{4x-12x^2}{(1-3x)(1+3x)}=\frac{4x(1-3x)}{(1-3x)(1+3x)}$

și simplificând obținem $E(x)=\frac{4x}{1+3x}$.

15. a) Vezi **figura 1.**

b) Fețele opuse în cub fiind paralele avem $AB'\|DC'$ și $A'D\parallel B'C$. Cum $A'B'\cap B'C=\{B'\}$, $A'D\cap DC'=\{D\}$, $AB',\ B'C\subset(AB'C)$ și $A'D,\ DC'\subset(A'DC')$ rezultă paralelismul planelor.

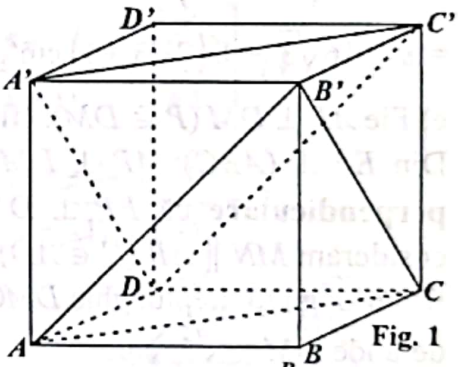


Fig. 1

c) Cum $CD\parallel A'B'$; atunci $m(\sphericalangle(C'A',\ DC))=$ $=m(\sphericalangle(C'A',\ A'B'))=m(\sphericalangle C'A'B')$. Fața $A'B'C'D'$ fiind pătrat avem $m(\sphericalangle C'A'B')=45°$.

d) Toate fețele în cub fiind congruente avem că diagonalele $[BC']$, $[BD]$, $[DA']$, $[A'C']$, $[DC']$, $[BA']$ sunt congruente și atunci $BA'C'D$ este un tetraedru regulat. Ne rămâne să aflăm înălțimea din B a tetraedrului regulat $BA'DC'$. (**fig. 2**) Construim $BP\perp(A'DC')$, $P\in(A'DC')$. Cum $\Delta BPA'\equiv\Delta BPC'\equiv\Delta BPD$ (I.C.) atunci $PA'=PC'=PD$, deci P este centrul cercului circumscris $\Delta A'DC'$ și centrul de greutate fiind situat la $\frac{2}{3}$ de vârf și $\frac{1}{3}$ de bază. În triunghiul echilateral $\Delta A'DC'$: $A'P=\frac{A'C'\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{A'C'\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

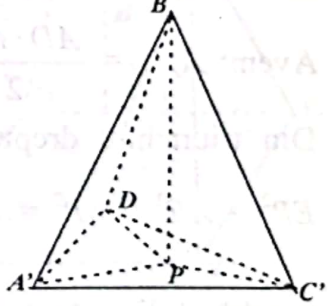


Fig. 2

În $\Delta BPA'$: $m(\sphericalangle BPA')=90°$ și atunci conform teoremei lui **Pitagora** avem $BP^2+PA'^2=BA'^2$ și

$BP^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2=32-\frac{96}{9}=\frac{192}{9}$, deci $BP=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 22

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
207	$\{-1; 0\}$	$\frac{2}{3}$	0	43	11	27	200	A	C	B	C

III. 13. a) Notăm cu x vârsta Oanei se obține ecuația: $2x + 12 = 26$ care are soluția 7. Deci Dana are 7 ani.

b) Notăm cu y cu câți ani în urmă vârsta lui Vlad era egală cu suma vârstelor Danei și Oanei. Atunci Vlad avea $12 - y$ ani iar Dana și Oana aveau $7 - y$ ani.

Avem ecuația: $2 \cdot (7 - y) = 12 - y$ care este echivalentă cu $12 - y = 14 - 2y$, de unde $y = 2$. În urmă cu 2 ani.

14. a) $E(x) = 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + 2x - 1 + x^2 - 4 - 3x^2 + 14 = x^2 + 6x + 10$.

b) $E(-3) = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 10 = 9 - 18 + 10 = 1$.

c) $E(a) = a^2 + 6a + 10 = (a^2 + 6a + 9) + 1 = (a + 3)^2 + 1$.

Cum $(a + 3)^2 \geq 0$ oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, avem $(a + 3)^2 + 1 > 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

15. a) Vezi figura 1.

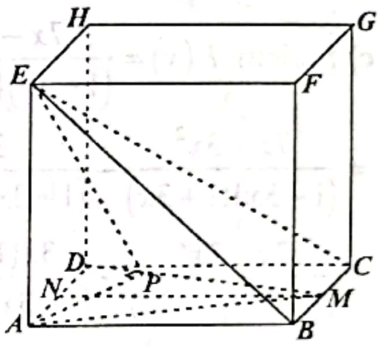


Fig. 1

b) Utilizând formula $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2 \cdot \mathcal{A}_B$ și $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h$ obținem:

$$\mathcal{A}_t = 2 \cdot \left(2 + 2\sqrt{3}\right) \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot \left(2 + 2\sqrt{3}\right) + 8\sqrt{3} =$$

$$= 8 + 16\sqrt{3} = 8\left(2\sqrt{3} + 1\right) \text{ cm}^2.$$

c) Fie $AP \perp DM$ ($P \in DM$). **(fig. 1)**

Din $EA \perp (ABC)$; $AP \perp DM$; $AP, MD \subset (ABC)$ rezultă conform **teoremei celor trei perpendiculare** că $EP \perp DM$. Calculăm lungimea segmentului $[AP]$. Pentru aceasta cosiderăm $MN \parallel AB$ ($N \in AD$), de unde rezultă că $MN \perp AD$ și $MN = AB = 2$ cm.

Din triunghiul dreptunghic DMC cu teorema lui **Pitagora** se obține $DM^2 = DC^2 + MC^2 = 5$, de unde $DM = \sqrt{5}$ cm.

Avem: $\mathcal{A}_{ADM} = \frac{AD \cdot MN}{2} = \frac{AP \cdot MD}{2}$, de unde $AP = \frac{2\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ cm.

Din triunghiul dreptunghic AEP ($AE \perp AP$) se obține cu teorema lui **Pitagora** că $EP^2 = AE^2 + AP^2 = 4 + \frac{16 \cdot 3}{5} = \frac{68}{5} = \frac{68 \cdot 5}{25}$, de unde $EP = \frac{2\sqrt{85}}{5}$ cm. Cum $EP \perp DM$ rezultă că distanța de la punctul E la dreapta MD este egală cu $\frac{2\sqrt{85}}{5}$ cm.

Observație: Putem determina lungimea segmentului $[AP]$ din asemănarea triunghiurilor APD și DCM de unde avem: $\frac{AP}{CD} = \frac{AD}{DM}$ etc.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 23

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3583000	6	50	$\frac{1}{2}$	$8\sqrt{3}$	42	3	600	B	D	C	B

III. 13. a) Fie a şi b numerele căutate, unde $a > b$. Avem relaţiile: $a = 10m$ ($m \in \mathbb{N}$); $b = 6n$ ($n \in \mathbb{N}$) şi $a - b = 120$. Câtul împărţirii numărului a la 5 este egal cu $2m$ iar câtul împărţirii lui b la 3 este egal cu $2n$. Se obţine sistemul: $\begin{cases} 10m - 6n = 120 \\ 2m - 2n = 20 \end{cases}$, care are soluţia $m = 15$ şi $n = 5$. Prin urmare, numerele căutate sunt 150 şi 30.

b) Notăm cu x% procentul căutat:

x% din $a = b$ implică $\frac{x}{100} \cdot 150 = 30$, de unde $\frac{x}{100} = \frac{30}{150}$, adică $x = \frac{100 \cdot 30}{150} = 20$.

Deci 20% din $a = b$.

14. a) $\frac{2x+6}{x^2+4x+3} = \frac{2(x+3)}{x^2+3x+x+3} = \frac{2 \cdot (x+3)}{x(x+3)+(x+3)} = \frac{2(x+3)}{(x+3)(x+1)} = \frac{2}{x+1}$.

b) $\frac{2a+6}{a^2+4a+3} = \frac{2}{a+1}$. Dar $\frac{2}{a+1} \in \mathbb{Z}$ implică $a + 1 \mid 2$, de unde $a + 1 \in \{-2; -1; 1; 2\}$ şi $a \in \{-3; -2; 0; 1\}$, şi ţinând cont de condiţiile de existenţă se obţine $a \in \{-2; 0; 1\}$.

c) $\left(\frac{4}{x-1} + \frac{13-5x}{1-x^2} - \frac{2x+6}{x^2+4x+3}\right) : \frac{1}{x+1} = \left[\frac{\overset{x+1}{\cancel{\quad}}4}{x-1} + \frac{13-5x}{(x-1)(x+1)} - \frac{\overset{x-1}{\cancel{\quad}}2}{x+1}\right] \cdot (x+1) =$

$= \frac{4x+4-13+5x-2x+2}{(x-1)(x+1)} \cdot (x+1) = \frac{7x-7}{(x-1)(x+1)} \cdot (x+1) = \frac{7\cancel{(x-1)(x+1)}}{\cancel{(x-1)(x+1)}} = 7.$

15. a) Vezi **figura 1.**

b) Fie $A'E \perp (ABC)$ ($E \in (ABC)$) iar punctele O şi O' centrele bazelor $ABCD$ şi, respectiv, $A'B'C'D'$. Deoarece planele (ACC') şi (ABC) sunt perpendiculare rezultă că: $E \in (AC)$; $pr_{(ABC)}[AA'] = AE$, $A'E = OO'$ şi $m(\sphericalangle A'AO) = 45°$. Deci $\sin 45° = \frac{A'E}{AA'}$, de unde

$A'E = OO' = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ cm.

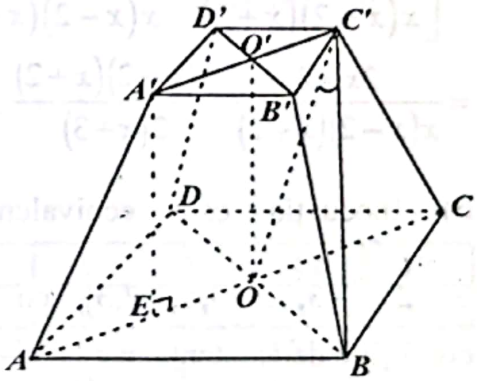


Fig. 1

c) $A'C' = A'B' \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm şi $A'O' = \frac{A'C'}{2} = 3\sqrt{2}$ cm.

Din triunghiul dreptunghic isoscel $A'AE$ se deduce că $AE = EA' = 3\sqrt{2}$ cm. Din dreptunghiul $EOO'A'$ rezultă că $OE = O'A' = 3\sqrt{2}$ cm. Deci $AO = AE + OE = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm şi $AC = 2 \cdot AO = 12\sqrt{2}$ cm. Din triunghiul dreptunghic isoscel ABC avem $AC^2 = AB^2 + BC^2$, de unde $2AB^2 = 144 \cdot 2$ şi $AB^2 = 144$, adică $AB = 12$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicând formula volumului trunchiului de piramidă $\mathcal{V}=\frac{h}{3}(L^2+l^2+L\cdot l)$ se obține

$\mathcal{V}=\frac{3\sqrt{2}}{3}\cdot(12^2+6^2+12\cdot 6)=\frac{3\sqrt{2}}{3}\cdot(144+36+72)=252\sqrt{2}\ \text{cm}^3$.

d) Din $OA=A'C'=6\sqrt{2}$ cm și $OA\parallel A'C'$ rezultă că patrulaterul $AOC'A'$ este paralelogram și avem $OC'\parallel AA'$ și $OC'=AA'=6$ cm. Deci unghiul format de dreptele $A'A$ și BC' este unghiul $\sphericalangle OC'B$. Din $BD\perp AC$ (diagonale în pătrat) și $OB\perp OO'$, pentru că $OO'\perp(ABC)$, rezultă că $BD\perp(ACC')$ și cum $OC'\subset(ACC')$ avem $OB\perp OC'$.
Din triunghiurile dreptunghice $\Delta OO'C'$ și $\Delta OBC'$ avem $OC'^2=OO'^2+O'C'^2=$
$=\left(3\sqrt{2}\right)^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2=36$ și $BC'^2=OC'^2+OB^2=36+\left(6\sqrt{2}\right)^2=108$ de unde $BC'=6\sqrt{3}$ cm.

$\sin(\sphericalangle OC'B)=\frac{OB}{BC'}=\frac{6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

VARIANTA 24

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	998	600	-3	12	24	6	126	C	B	D	A

III. 13. a) A rezolvat 4 probleme și a greșit 6 probleme. A obținut $4\cdot 5-6\cdot 2=8$ puncte.
b) Să presupunem că a rezolvat corect x probleme. Atunci a greșit $10-x$ probleme. Punând în ecuație avem $x\cdot 5-(10-x)\cdot 2=29$, altfel scris $7x=49$ cu soluția $x=7$. A rezolvat 7 probleme corect.

14. a) Scriem $E(x)=\left[\frac{1}{x(x-2)}-\frac{1}{x(x+2)}+\frac{2}{(x-2)(x+2)}\right]\cdot\frac{x(x-2)(x+2)}{2(x+3)}=$

$=\left[\frac{x+2}{x(x-2)(x+2)}-\frac{x-2}{x(x-2)(x+2)}+\frac{2x}{x(x-2)(x+2)}\right]\cdot\frac{x(x-2)(x+2)}{2(x+3)}=$

$=\frac{2x+4}{x(x-2)(x+2)}\cdot\frac{x(x-2)(x+2)}{2(x+3)}$ și simplificând se obține $E(x)=\frac{2x+4}{2(x+3)}$ iar $E(x)=\frac{x+2}{x+3}$.

b) Inecuația este echivalentă cu $|x+3|\cdot\frac{|x+2|}{|x+3|}<4$ și $|x+2|<4$, de unde $x+2\in\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ cu soluțiile $x\in\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1\}$ și ținând cont de condițiile de existență $x\notin\{-3,-2,0,2\}$ obținem $x\in\{-5,-4,-1,1\}$.

c) Pentru ca $2E(a)\in\mathbb{Z}$ trebuie ca $\frac{2a+4}{a+3}\in\mathbb{Z}$, deci $a+3/2a+4$, dar $a+3/2(a+3)$ adică $a+3/2a+6$ rezultând că $a+3/(2a+6)-(2a+4)$ și $a+3/2$.
Așadar $a+3\in\{-2,-1,1,2\}$ de unde $a\in\{-5,-4,-1,1\}$ și ținând cont de condițiile de existență avem $a\in\{-5;-4;-1\}$.

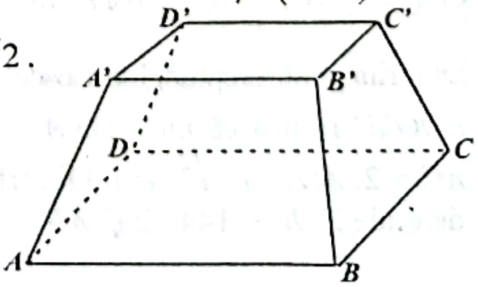


Fig. 1

Scanned with OKEN Scanner

15. a) Vezi figura 1.

b) În trapezul isoscel $ABB'A'$ (**fig. 2**) considerăm M şi N mijloacele segmentelor $[AB]$, respectiv $[A'B']$.

Atunci $MN = 12$ cm, ea fiind apotemă. Cum trapezul este isoscel $P \in [MN]$. Ţinând seama de faptul că

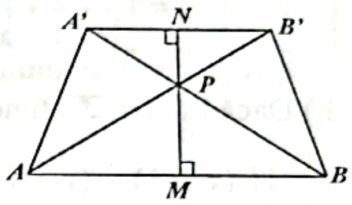


Fig. 2

$\Delta A'NP \sim \Delta BMP$ (t.f.a.) deducem că $\frac{A'N}{MB} = \frac{NP}{MP}$ şi $\frac{3}{9} = \frac{NP}{MP}$,

iar $\frac{NP}{3} = \frac{MP}{9} = \frac{NP + PM}{3+9} = \frac{12}{12}$ şi obţinem $MP = 9$. În ΔPMB $m(\sphericalangle PMB) = 90°$ şi atunci $PB^2 = PM^2 + MB^2 = 9^2 + 9^2 = 162$; de unde $PB = 9\sqrt{2}$ cm. Perimetrul ΔPAB este $PA + PB + AB = 9\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 18 = 18(\sqrt{2}+1)$ cm.

c) Notăm cu O şi O' centrele bazelor $ABCD$, respectiv $A'B'C'D'$. În trapezul $OMNO'$ construim $NN' \perp OM$, $N' \in [OM]$. (**fig. 3**) Patrulaterul $ON'NO'$ fiind dreptunghi avem $ON' = ON = 3$ cm şi $OO' = NN'$. Atunci, OM fiind apotema pătratului bazei mari şi $O'N$ fiind apotema pătratului bazei mici, avem că $N'M = 9 - 3 = 6$ cm. În triunghiul dreptunghic $NN'M$ avem: $NN'^2 = NM^2 - MN'^2 = 12^2 - 6^2 = 108$ şi $NN' = 6\sqrt{3}$ cm $= OO'$.

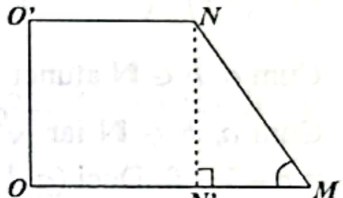


Fig. 3

Volumul trunchiului de piramidă este $\mathcal{V} = \frac{h}{3}(L^2 + l^2 + L \cdot l)$ şi înlocuind obţinem $\mathcal{V} = \frac{6\sqrt{3}}{3}(18^2 + 6^2 + 18 \cdot 6) = 936\sqrt{3}$ cm^3.

d) Avem că $OM \perp AB$, $NM \perp AB$, $M \in [AB]$, $OM \subset (ABC)$ şi $NM \subset (ABB')$ atunci $m(\sphericalangle((ABC);(ABB'))) = m(\sphericalangle NMO)$. Dar am văzut la **c)**: $\operatorname{tg}(\sphericalangle NMO) = \frac{NN'}{N'M} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$ şi rezultă că $m(\sphericalangle NMO) = 60°$.

VARIANTA 25

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	b	15	3/5	48	12	150	8	C	D	C	B

III. 13. 20% din $a = \frac{20}{100} \cdot a = \frac{a}{5}$, 80% din $b = \frac{80}{100} \cdot b = \frac{4b}{5}$. Avem că $\frac{a}{5} = \frac{4b}{5}$ şi $a = 4b$.

a) Notăm cu $p\%$ procentul căutat. Atunci $\frac{p}{100} \cdot a = b$ şi $\frac{p}{100} = \frac{b}{a}$, înlocuind $a = 4b$ avem $\frac{p}{100} = \frac{b}{4b}$ şi simplificând avem $p = 25$. Procentul este 25%.

b) Înlocuind $a = 4b$ în ecuaţie obţinem $16b^2 + b^2 = 17$ şi $17b^2 = 17$ cu $b^2 = 1$, şi fiind în $\mathbb{N}$, avem soluţia $b = 1$. Perechea (a, b) este $(4, 1)$.

Scanned with OKEN Scanner

14. a) $E(x)=\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{1-x}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}\right]\cdot\frac{x+1}{2}=\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}\right]\cdot\frac{x+1}{2}=$

$=\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}\right]\cdot\frac{x+1}{2}=\frac{2x+2}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{x+1}{2}=\frac{x+1}{x-1}.$

b) Dacă $E(x)\in\mathbb{Z}$ atunci $\frac{x+1}{x-1}\in\mathbb{Z}$, de unde $x-1\,|\,x+1$, dar $x-1\,|\,x-1$, atunci $x-1\,|\,(x+1)-(x-1)$ adică $x-1\,|\,2$. Deci $x-1\in\{-2,-1,1,2\}$ și $x\in\{-1,0,2,3\}$. Ținând cont de condițiile de existență, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, avem $x\in\{0,2,3\}$.

c) $E\left(\sqrt{2}\right)=\left(a\sqrt{2}+b\right)^2$ implică $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\left(a\sqrt{2}+b\right)^2$ și prin amplificare $\left(\sqrt{2}+1\right)^2=\left(a\sqrt{2}+b\right)^2$.

Cum $a, b\in\mathbb{N}$ atunci $a\sqrt{2}+b>0$ și rezultă că $\sqrt{2}+1=a\sqrt{2}+b$ sau $\sqrt{2}(a-1)+(b-1)=0$. Cum $a, b\in\mathbb{N}$ iar $\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ecuația are soluție când $a-1=b-1=0$. Deci $(a, b)\in\{(1, 1)\}$.

15. a) Vezi **fig. 1**.

b) Fie O și O' centrele bazelor mari, respectiv, mici ale trunchiului de con și $M=\text{pr}_{OB}B'$ (**figura 2**). Patrulaterul $OMB'O'$ fiind dreptunghi avem $O'B'=OM=15$ și $OO'=B'M$. Atunci $MB=30-15=15$ cm iar în triunghiul $B'MB$: $m(\sphericalangle B'MB)=90°$, $MB=15$, $BB'=30$ și considerând mijlocul lui $[BB']$ se arată că $m(\sphericalangle MB'B)=30°$ și $m(\sphericalangle B'BM)=60°$. Cum $B'M\perp OB$ rezultă că unghiul căutat este chiar $\sphericalangle B'BM$ care are măsura de 60°.

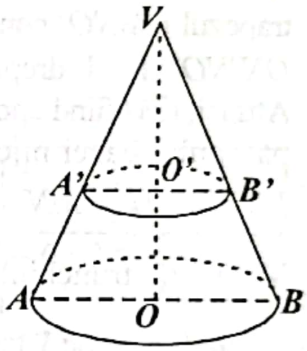


Fig. 1

c) Fie V vârful conului din care provine trunchiul de con (**fig. 1**) Atunci $\Delta VO'A'\sim\Delta VOA$ și rezultă că $\frac{A'O'}{AO}=\frac{VA'}{VA}$ de unde $\frac{VA'}{VA'+30}=\frac{15}{30}$ cu soluția $VA'=30$ cm și $VA=60$ cm.

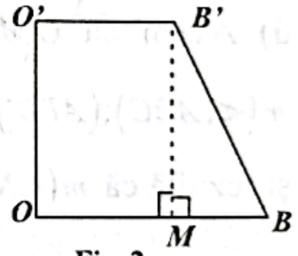


Fig. 2

În triunghiul dreptunghic ΔVOA avem $VO^2=VA^2-OA^2=3600-900=2700$ iar $VO=30\sqrt{3}$ cm. Volumul căutat este egal cu $V=\frac{\pi\cdot OA^2\cdot VO}{3}=\frac{\pi\cdot 900\cdot 30\sqrt{3}}{3}=9000\sqrt{3}\pi$ cm^3.

d) În **figura 3** este reprezentată desfășurarea suprafeței laterale a conului din care provine trunchiul. Cum $\mathcal{A}_{\ell\,\text{con}}=\mathcal{A}_{\text{sector cerc}}$, atunci $\pi\cdot OA\cdot VA=\frac{\pi\cdot VA^2\cdot n°}{360°}$, de unde $n°=360°\cdot\frac{OA}{VA}$ cu $n=180$. Unghiul căutat are măsura egală cu 180°.

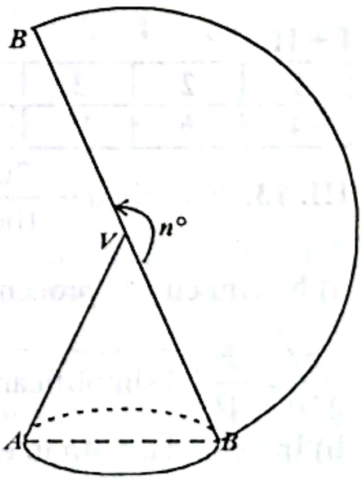


Fig. 3

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 26

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	10	$\frac{1}{3}$	–6	9	24	8	100	C	B	C	A

I.1. $111 - 98 = 13$. **2.** Aplicăm definiția mediei geometrice a două numere pozitive a și b: $m_g = \sqrt{a \cdot b}$. $\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{100} = 10$. **3.** $2 < 3 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$. **4.** $2x = -12$, atunci $x = -6$.

5. Un caiet costă $\frac{63}{7} = 9$ lei. **6.** Hexagonul are 6 laturi congruente. $\mathcal{P} = 6 \cdot 4 = 24$ cm.

7. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$ atunci $AO^2 = AB^2 - OB^2 = 25 - 9 = 16$ și $AC = 2AO = 2 \cdot 4 = 8$ cm.

8. Aplicăm formula $\mathcal{A}_S = 4\pi R^2 = 100\pi$ cm^2.

II. 9. $\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$ iar $\sqrt{5^2 \cdot 4^2} = \sqrt{(5 \cdot 4)^2} = 5 \cdot 4 = 20$. Atunci rezultatul produsului este $3 \cdot 20 = 60$. Răspuns: **C**.

10. Dacă $x - y = 1$, atunci $x = y + 1$ și $(x - y)(x + y) - 2y = 1$. $(y + 1 + y) - 2y = 1$. Răspuns: **B**.

11. Ținând cont că AM este mediană avem, conform ipotezei, că $AM = MB = MC = AB$. Deci ΔAMB este echilateral iar $m(\sphericalangle AMC) = m(\sphericalangle MAB) + m(\sphericalangle MBA) = 60° + 60° = 120°$. Răspuns: **C**.

12. Trapezul $MBCD$ are aria $\frac{(MB + CD) \cdot BC}{2} = \frac{(2 + 4) \cdot 4}{2} = 12$ cm^2. Răspuns: **A**.

III. 13. a) Din scrierea zecimală $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ și din forma mulțimii rezultă $100a + 10b + c = a + 10b + 100c$ și atunci $99a = 99c$. Așadar $a = c$ pentru că $a \neq 0$.

b) Elementele mulțimii A sunt de forma $\overline{aba}$, cuprinzând în total 90 de numere. Dacă $5 / \overline{aba}$ atunci $a \in \{5\}$ și numerele sunt de forma $\overline{5b5}$, în total 10 numere: {505; 515; ...; 595}. Probabilitatea este egală cu: $\frac{\text{nr. cazurilor favorabile}}{\text{nr. cazurilor posibile}} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$.

14. a) Dacă punctele $A(2; m)$ și $B(3; 6)$ aparțin graficului atunci $f(2) = m$ și $f(3) = 6$, de unde $2m + n = m$ și $3m + n = 6$, ecuații cu soluția comună $m = 3$, $n = -3$. **(fig. 1)**

b) Punctele $A(2; 3)$ și $B(3; 6)$ sunt situate pe graficul funcției. Graficul funcției este dreapta AB. **(fig. 1)**

c) $f(1) = 0$ și $f(0) = -3$. Atunci $C(1; 0)$ și $D(0; -3)$. Fie M mijlocul laturii $[CE]$. Din proprietățile centrului de greutate O avem că $M\left(0; \frac{3}{2}\right)$. Cum M este mijlocul lui $[CE]$ conform formulei coordonatelor mijlocului unui segment, avem $0 = \frac{1 + x_E}{2}$ și $\frac{3}{2} = \frac{0 + y_E}{2}$ cu soluția $x_E = -1$ și $y_E = 3$, unde $E(x_E, y_E)$. Am obținut $E(-1; 3)$.

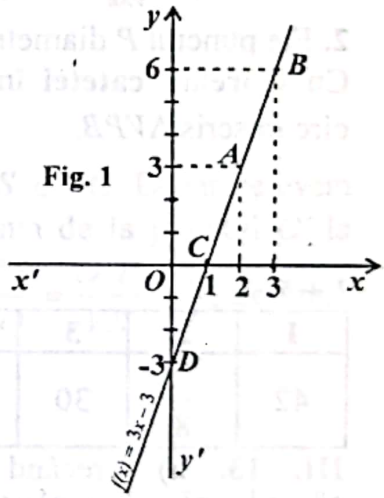


Fig. 1

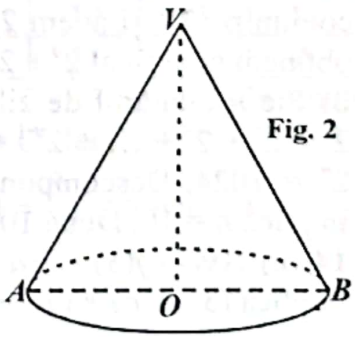


Fig. 2

15. a) Vezi **figura 2**.

Scanned with OKEN Scanner

b) Avem egalitatea $\mathscr{L}_{arc} = \mathscr{L}_{cerc}$, deci $\frac{\pi \cdot VA \cdot 240^\circ}{180^\circ} = 2\pi \cdot OA$ şi rezultă că $VA = \frac{2 \cdot 180 \cdot 8}{240} = 12$ cm.

c) În ΔVOA, conform **teoremei lui Pitagora**: $VO^2 = VA^2 - OA^2 = 12^2 - 64$ şi $VO = 4\sqrt{5}$ cm.

Conform formulei $V = \frac{\pi \cdot OA^2 \cdot VO}{3} = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 4\sqrt{5}}{3} = \frac{256\sqrt{5}}{3}\pi$ cm^3.

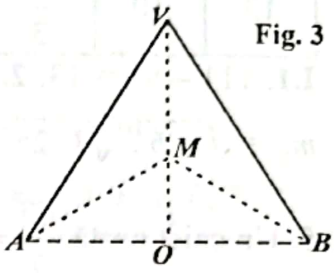


Fig. 3

d) Fie M centrul cercului circumscris ΔVAB. Cum ΔVAB este isoscel atunci $M \in VO$ (**fig. 3**). În ΔVOA, $VO = 4\sqrt{5} > 4\sqrt{4} = 8 = OA$ şi atunci $m(\sphericalangle VAO) > m(AVO)$. Deci $m(\sphericalangle AVO) < 45^\circ$ şi, analog, $m(\sphericalangle OVB) < 45^\circ$. Atunci $m(\sphericalangle AVB) < 90^\circ$ şi triunghiul ΔVAB este ascuţitunghic iar $O \in \text{Int}(\Delta VAB)$. Notăm $MA = MB = MV = x$ şi $MO = VO - VM = 4\sqrt{5} - x$. Relaţia $MA = MV$ se scrie $MA^2 = MV^2$ şi cu **teorema lui Pitagora** rezultă $MO^2 + OA^2 = MV^2$ iar $\left(4\sqrt{5} - x\right)^2 + 64 = x^2$, de unde $80 - 8\sqrt{5}x + x^2 + 64 = x^2$ cu soluţia

$x = \frac{144}{8\sqrt{5}} = \frac{18\sqrt{5}}{5}$ cm.

Observaţii:

1. $\mathcal{A}_{VAB} = \frac{VO \cdot AB}{2} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 16}{2} = 32\sqrt{5}$ cm^2 şi putem aplica formula

$$R = \frac{VA \cdot VB \cdot AB}{4 \cdot \mathcal{A}_{VAB}} = \frac{12 \cdot 12 \cdot 16}{4 \cdot 32\sqrt{5}} = \frac{18\sqrt{5}}{5} \text{ cm.}$$

2. Fie punctul P diametral opus vârfului V al triunghiului VAB (secţiunea axială)
Cu **teorema catetei** în triunghiul dreptunghic ΔVPB se determină diametrul cercului circumscris ΔVPB.

VARIANTA 27

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
42	$\frac{7}{8}$	30	$\frac{1}{3}$	88	32	42	60	A	D	B	B

III. 13. a) Trecând pe 2^{51} în membrul stâng şi grupându-l cu 2^{50}, avem: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{50}(1 - 2) = -1$ de unde $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{49} - 2^{50} = -1$. Vom da factor comun pe 2^{49} şi avem $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{49}(1-2) = -1$ şi procedând în mod asemănător, obţinem spre final $2^0 + 2^1(1 - 2) = -1$, $2^0(1 - 2) = -1$, $-1 = -1$ evident.

b) Fie n numărul de zile căutat. Avem ecuaţia: $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} = 1023$, dar $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ din demonstraţia de la punctul **a)**. Atunci $2^n - 1 = 1023$, $2^n = 1024$. Descompunem pe 1024 în factori primi şi avem $1024 = 2^{10}$, adică $2^n = 2^{10}$ implică $n = 10$. După 10 zile a citit 1023 de pagini.

14. a) Avem $f(3) = 3a + b$, $f(7) = 7a + b$ şi $f(5) = 5a + b$. Atunci $f(3) + f(7) = 2f(5)$ implică $(3a + b) + (7a + b) = 2(5a + b)$, adică $10a + 2b = 10a + 2b$, evident.

Scanned with OKEN Scanner

b) Cum punctele A şi B sunt situate pe graficul funcției, avem $f(0) = \sqrt{3}$ şi $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2}$ ce implică sistemul: $0 + b = \sqrt{3}$ şi $\frac{\sqrt{3}}{2}a + b = \frac{3}{2}$. Atunci $b = \sqrt{3}$ şi $\frac{\sqrt{3}}{2}a + \sqrt{3} = \frac{3}{2}$, adică $a = \sqrt{3} - 2$ şi $b = \sqrt{3}$. Avem funcția $f(x) = \left(\sqrt{3}-2\right)x + \sqrt{3}$.

c) Inecuația devine $\left(\sqrt{3}-2\right)x + \sqrt{3} \le 2$ adică $\left(\sqrt{3}-2\right)x \le 2 - \sqrt{3}$. Cum $\sqrt{3}-2$ este număr negativ avem $x \ge \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} = -1$. Soluția $x \in [-1, +\infty)$.

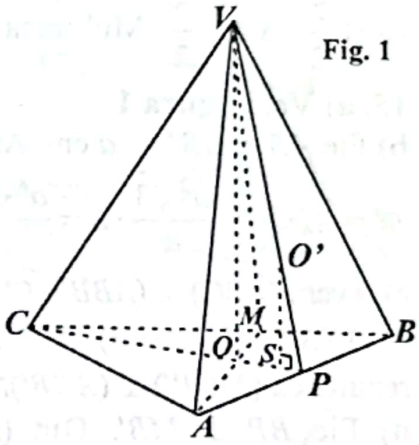


Fig. 1

15. a) Vezi **figura 1.**

b) Cum piramida este regulată cu $VA = AB$, avem toate muchiile egale cu 6 cm ea fiind tetraedru regulat. Fie punctul M mijlocul laturii BC. Cum $BM \perp AM$ (în ΔABC), $BM \perp VM$ (în ΔVBC), AM şi VM concurente, incluse în planul (VMA), implică $BM \perp (VAM)$, adică $BC \perp VA$. **(fig. 1)**

c) Fie $VO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$. Triunghiul VOA este dreptunghic în O şi $VA = 6$ cm.

$AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\cdot\frac{6\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm. Aplicăm **teorema lui Pitagora** obținem $VO^2 = VA^2 - AO^2 = 6^2 - (2\sqrt{3})^2 = 24$, de unde $VO = 2\sqrt{6}$ cm.

Avem $\mathcal{V}_{VABC} = \frac{\mathcal{A}_{\Delta ABC}\cdot VO}{3} = \frac{\frac{36\sqrt{3}}{4}\cdot 2\sqrt{6}}{3} = 18\sqrt{2}$ cm^3.

d) Fie O' centrul de greutate al ΔVAB şi $VP \perp AB$, iar $O'S \perp PC$, $S \in PC$. Deoarece avem $(PVC) \perp (ABC)$ şi $VO \perp (ABC)$ rezultă $O'S \perp (ABC)$, deci distanța de la punctul O' la planul (ABC) este egală cu lungimea segmentului $O'S$. Avem $\frac{O'S}{VO} = \frac{O'P}{VB} = \frac{1}{3}$, de unde

$O'S = \frac{VO}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm.

VARIANTA 28

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	3	21	1101	63	9	5	3	D	D	C	A

III. 13. a) Fie x numărul de copii. Atunci avem ecuația: $20x + 5 = 30x - 25$ de unde $10x = 30$ şi $x = 3$. Deci sunt 3 copii. **b)** Obiectul costă $20 \cdot 3 + 5 = 65$ lei.

14. a) Din $A\left(1, \frac{5}{2}\right)$ comun graficelor, implică $f(1) = \frac{5}{2}$ şi $g(1) = \frac{5}{2}$. Atunci $2 + a = \frac{5}{2}$ şi $\frac{3}{2} - b = \frac{5}{2}$, de unde $a = \frac{1}{2}$ şi $b = -1$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Pentru $a=\frac{1}{2}$ obținem $S=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(20)=2\cdot 1+\frac{1}{2}+2\cdot 2+\frac{1}{2}+2\cdot 3+$

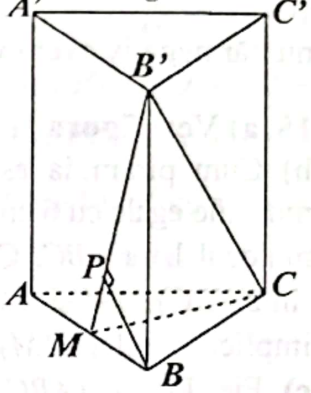
$+\frac{1}{2}+...+2\cdot 20+\frac{1}{2}=2(1+2+3+...+20)+20\cdot\frac{1}{2}=2\cdot\frac{20(20+1)}{2}+\overset{10}{\cancel{20}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}=21\cdot 20+10=$

$=420+10=430.$

c) Inecuația $f(x)\le 2\cdot g(x)+1$ devine $2x+\frac{1}{2}\le 2\cdot\left(\frac{3}{2}x+1\right)+1$. $2x+\frac{1}{2}\le 3x+3$, $2x-3x\le 3-\frac{1}{2}$,

$-x\le\frac{5}{2}$, $x\ge-\frac{5}{2}$. Mulțimea soluțiilor este: $x\in\left[-\frac{5}{2};+\infty\right)$.

Fig. 1



15. a) Vezi **figura 1**.

b) Fie $AB=BB'=a$ cm. Atunci din formula volumului

$\mathcal{V}=A_b\cdot h=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}=54\sqrt{3}$, implică $a=6$ cm.

c) Avem $(ABC)\perp(ABB')$; $(ABC)\cap(ABB')=AB$, $MC\perp AB$ (înălțime în ΔABC echilateral), de unde $MC\perp(ABB')$. Cum $MC\subset(MB'C)$ rezultă că $(MCB')\perp(ABB')$.

d) Fie $BP\perp MB'$. Din $(ABB')\cap(MCB')=MB'$ și $(ABB')\perp(MCB')$ rezultă că $BP\perp(MCB')$ și distanța de la punctul B la planul $(MB'C)$ este egală cu lungimea segmentului (BP). În triunghiul dreptunghic $B'BM$ avem: $MB'^2=MB^2+BB'^2$, de unde

$MB'=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ cm și $BP=\frac{MB\cdot BB'}{MB'}=\frac{3\cdot 6}{3\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$ cm.

VARIANTA 29

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	259	3	1,234	3000	40	200	24	A	C	D	D

III. 13. a) Fie a și b cele două numere, atunci $\frac{a}{b}=0,64$ și $\frac{a+b}{2}=61,5$. Avem $a=0,64b$ și $a+b=123$. Adică $0,64+b=123$, $1,64b=123$ și $b=\frac{123}{1,64}=\frac{12300}{164}=75$ și $a=48$.

b) $m_g=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{48\cdot 75}=\sqrt{16\cdot 3\cdot 25\cdot 3}=4\cdot 3\cdot 5=60$.

14. a) $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{2}=\left|1-\sqrt{2}\right|-\sqrt{2}=\sqrt{2}-1-\sqrt{2}=-1$. Am folosit $1-\sqrt{2}<0$.

b) $9n^2+6n+1=(3n)^2+2\cdot 3n\cdot 1+1^2=(3n+1)^2$, care este pătrat perfect.

c) Pentru ca $E=\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{9y^2+6y+10}$ să aibă valoare minimă este necesar ca fiecare rădăcină pătrată să fie minimă. $E=\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(3y+1)^2+9}$, altfel spus

Scanned with OKEN Scanner

$\sqrt{(x-3)^2}$ şi $\sqrt{(3y+1)^2+3^2}$ să fie minimi, adică $\sqrt{(x-3)^2}=0$ şi $\sqrt{(3y+1)^2+3^2}=3$, implică $x-3=0$ şi $3y+1=0$, adică $x=3$ şi $y=-\frac{1}{3}$.

Pentru aceste valori avem valoarea minimă a expresiei $E=3$.

15. a) Vezi **figura 1.**

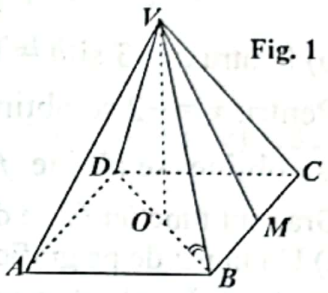


Fig. 1

b) În ΔVMB, dreptunghic în M, aplicând **teorema lui Pitagora** se obţine $BM=5$ şi $AB=BC=10$ cm. **(fig. 1)**

c) Fie $VO\perp(ABC)$, O centrul pătratului $ABCD$. Unghiul cerut este $\sphericalangle VBO$ şi $\cos(\sphericalangle VBO)=\frac{OB}{VB}=\frac{5\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, implică $m(\sphericalangle B)=45^\circ$, adică ΔVOB este dreptunghic isoscel (diagonala $BD=10\sqrt{2}$ cm).

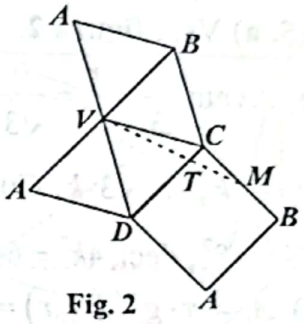


Fig. 2

d) Din $T\in(DC)$, avem suma $VT+TM$ minimă dacă în desfăşurarea piramidei această sumă este egală cu VM. Fie **fig. 2** desfăşurarea piramidei $VABCD$. Extragem triunghiul echilateral ΔVDC şi pătratul $ABCD$ **(fig. 3)**. Fie $VM'\perp DC$, $\Delta VM'T\sim\Delta MCT$ (triunghiuri dreptunghice cu $\sphericalangle M'TV\equiv\sphericalangle CTM$–opuse la vârf), implică: $\frac{TM'}{TC}=\frac{VM'}{MC}$. Dar $MC=5$, $M'T+TC=5$, $VM'=5\sqrt{3}$. Obţinem: $\frac{TM'}{TC}=\frac{\cancel{5}\sqrt{3}}{\cancel{5}}$, adică $TM'=\sqrt{3}\cdot TC$.

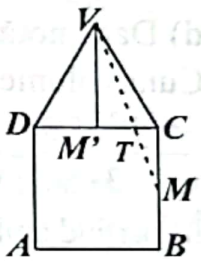


Fig. 3

Vom înlocui în $M'T+TC=5$ şi avem: $\sqrt{3}\,TC+TC=5$, $TC\left(\sqrt{3}+1\right)=5$.

În concluzie $TC=\frac{5\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$.

VARIANTA 30

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,25	9	$(-\infty;2]$	327	169	$6\sqrt{3}$	6	32	C	B	B	D

III. 13. a) Dacă notăm cu x numărul de zile după care în cele două depozite rămân cantităţi egale de marfă se obţine ecuaţia: $2800-100\cdot x=1300-25\cdot x$, de unde $100x-25x=2800-1300$, deci $x=20$ zile.

b) Notăm cu y numărul de zile după care cantitatea de marfă din primul depozit este dublă faţă de cea rămasă în al doilea depozit şi se obţine ecuaţia: $2800-100\cdot y=2600-50\cdot y$, deci $100y-50y=2800-2600$, de unde $y=4$ zile.

14. a) Deoarece $A(-2;2)$ aparţine graficului funcţiei f rezultă $f(-2)=2$, dar $f(-2)=(a-3)\cdot(-2)+b+1$, deci $(a-3)\cdot(-2)+b+1=2$, de unde $-2a+b=-5$.

Deoarece $B(3;2)$ aparţine graficului funcţiei f rezultă $f(3)=2$, dar $f(3)=(a-3)\cdot 3+b+1$, deci $(a-3)\cdot 3+b+1=2$, de unde $3a+b=10$.

Scanned with OKEN Scanner

Se rezolvă sistemul: $\begin{cases} -2a+b=-5 \\ 3a+b=10 \end{cases}$ şi se obţine $a=3$ şi $b=1$.

b) Pentru $a=3$ şi $b=1$ avem funcţia $f(x)=2$ funcţie constantă.

Pentru $x=-2$ se obţine $f(-2)=2$ deci $A(-2;2)$ iar pentru $x=3$ se obţine se obţine $f(3)=2$, deci $B(3;2)$.

Graficul funcţiei f este dreapta AB, paralelă cu axa Ox (**fig. 1**).

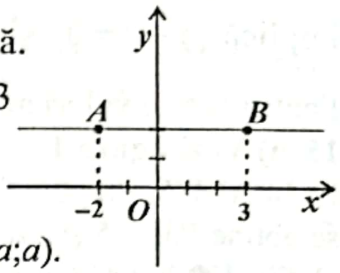


Fig. 1

c) Un punct de pe graficul funcţiei $f(x)$ cu coordonate egale este $M(a;a)$.

Deci $f(a)=a$, adică $a=2$ deci avem punctul $M(2;2)$.

15. a) Vezi **figura 2.**

b) Avem $\frac{R}{3}=\frac{r}{2}=\frac{h}{\sqrt{3}}=k$, unde k este valoarea comună a rapoartelor. Rezultă că $R=3\cdot k$, $r=2\cdot k$, $h=\sqrt{3}\cdot k$. Cum $g^2=h^2+(R-r)^2$ avem $\left(\sqrt{3}\cdot k\right)^2+(3k-2k)^2=8^2$, de unde rezultă că $4k^2=8^2$, deci $4k^2=64$, implică $k^2=16$, $k=4$. Deci avem: $R=12$ cm, $r=8$ cm, $h=4\sqrt{3}$ cm.

c) $A_\ell=\pi\cdot g\cdot(R+r)=\pi\cdot 8(12+8)=160\pi$ cm^2.

d) Dacă notăm $SO=x$ (**fig. 2**) atunci $SO'=h-x=4\sqrt{3}-x$.

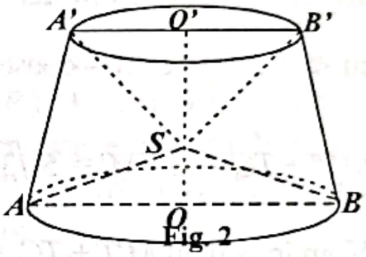


Fig. 2

Cum volumele celor două conuri sunt egale atunci avem:

$\frac{\pi\cdot R^2\cdot SO}{3}=\frac{\pi\cdot r^2\cdot SO'}{3}$, adică $\pi\cdot 144\cdot x=\pi\cdot 64\left(4\sqrt{3}-x\right)$.

Împărţind ambii membri ai ecuaţiei la 16π, se obţine $9x=4\left(4\sqrt{3}-x\right)$, adică $9x=16\sqrt{3}-4x$, de unde $x=\frac{16\sqrt{3}}{13}$. Deci $SO=\frac{16\sqrt{3}}{13}$ cm.

VARIANTA 31

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
18	a	3	17	12	16	45	$54\sqrt{3}$	D	D	C	B

III. 13. Notăm cu x întreaga distanţă. În prima zi a parcurs $\frac{35}{100}\cdot x=\frac{7}{20}x$; a doua zi a parcurs $\frac{20}{100}\cdot\frac{13}{20}x=\frac{13}{100}x$ şi vom avea ecuaţia $x-\frac{7}{20}x-\frac{13}{100}x=624$ care are soluţia $x=1200$.

a) Întreaga distanţă este de 1200 km. **b)** În a doua zi a parcurs $\frac{13}{100}\cdot 1200=156$ km.

14. a) $n=f\left(\sqrt{5}-5\right)-f\left(\sqrt{5}-3\right)=\frac{8-\sqrt{5}}{2}-\frac{6-\sqrt{5}}{2}=\frac{8-\sqrt{5}-6+\sqrt{5}}{2}=\frac{2}{2}=1$. Deci $n\in\mathbb{N}$.

b) Dacă $D\in G_g$, atunci $g(-5)=-1$, de unde $(1-m)\cdot(-5)+3m=-1$ care se scrie echivalent $-5+5m+3m=-1$ cu soluţia $m=\frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Dacă $m=\frac{1}{2}$, atunci $g(x)=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$ şi vom avea: $|f(x)|+|g(x)|=\left|\frac{3-x}{2}\right|+\left|\frac{x+3}{2}\right|=$

$=\frac{1}{2}(|3-x|+|x+3|)$. Se disting trei situaţii, prin explicitarea modulului:

1. Pentru $x\in(-\infty,-3]$ avem $|f(x)|+|g(x)|=\frac{1}{2}(3-x-x-3)=-3$ şi deci $|f(x)|+|g(x)|\geq 3$.

2. Pentru $x\in(-3,3]$: $|f(x)|+|g(x)|=\frac{1}{2}(3-x+x+3)=3$

3. Pentru $x\in(3,+\infty)$: $|f(x)|+|g(x)|=\frac{1}{2}(-3+x+x+3)=x$, iar cum $x>3$, din nou $|f(x)|+|g(x)|>3$.

Deci pentru orice $x\in\mathbb{R}$ $|f(x)|+|g(x)|\geq 3$.

15. a) Vezi **figura 1. b)** Cum $[OO']$ este linie mijlocie în $\Delta B'AC$ atunci $OO'\|AC$ şi $BB'\perp AC$, deci $BB'\perp OO'$.

c) Fie N mijlocul lui $[OO']$. Feţele laterale fiind dreptunghiuri congruente avem $BC'=BA'$ şi $BO'=BO$. Cum $\Delta BOO'$ este isoscel, atunci $BN\perp OO'$ şi $d(B,OO')=BN$. Din ΔBNO ($m(\sphericalangle BNO)=90°$) în care $BO=\frac{BA'}{2}=\frac{10}{2}=5$ cm şi $ON=\frac{OO'}{2}=\frac{AC}{4}=2$ cm,

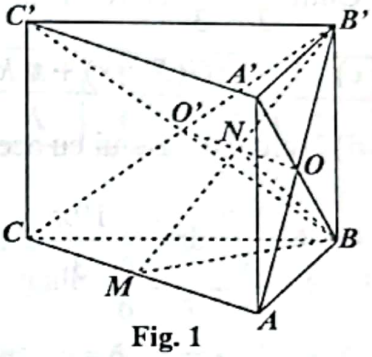


Fig. 1

obţinem conform **teoremei lui Pitagora** că $BN=\sqrt{21}$ cm.

d) Avem: $BA'\cap B'A=\{O\}$, $BC'\cap B'C=\{O'\}$, BA', $BC'\subset(BAC')$, $B'A$, $B'C\subset(B'AC)$. $(B'AC)\cap(BA'C')=OO'$, $BN\perp OO'$ şi de asemenea $MN\perp OO'$, M fiind mijlocul muchiei $[AC]$. Deci unghiul plan al diedrului format de planele $(B'AC)$ şi $(BA'C')$ este $\sphericalangle BNM$. Se calculează în ΔMNB isoscel ($NB=NM$), înălţimea corespunzătoare bazei (3 cm) şi apoi înălţimea corespunzătoare laturii $[BN]$ ($\frac{12\sqrt{7}}{7}$ cm). Prin urmare $\sin(\sphericalangle MNB)=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

VARIANTA 32

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	2	12	16	90	12	$100\sqrt{3}$	216	C	D	B	C

III. 13. Se notează cu x numărul răspunsurilor corecte şi cu y numărul răspunsurilor greşite şi se poate scrie sistemul de ecuaţii: $\begin{cases}x+y=100\\5x-3y=340\end{cases}$ care are soluţia $x=80$ şi $y=20$.

a) Deci elevul a dat 80 de răspunsuri corecte.

b) Pentru a depăşi 450 de puncte trebuie ca $5x-3y>450$ ceea ce conduce la $8x>750$, adică $x>93$. Prin urmare numărul minim de răspunsuri corecte este 94.

14. a) Dacă punctul $A(a, 25)$ este situat pe grafic atunci $f(a)=25$, obţinând ecuaţia $a^2+a-20=0$ cu soluţiile 4 şi –5.

b) $a=4$ şi $f(x)=5x+5$. Pentru $x=-1$ avem $f(-1)=0$, iar pentru $x=0$ avem $f(0)=5$. Deci găsim $A(-1;0)$ şi $B(0;5)$ de pe grafic. (**fig. 1**)

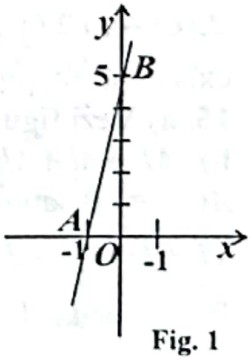


Fig. 1

Scanned with OKEN Scanner

c) $M(m;n)\in G_f$. $5\cdot|m|=|n|$, $5\cdot|m|=|5m+5|$, $5\cdot|m|=5|m+1|$ și atunci $m=m+1$ (imposibil) sau $m=-m-1$ cu soluția $m=-\frac{1}{2}$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+5=\frac{5}{2}$. Deci $M\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.

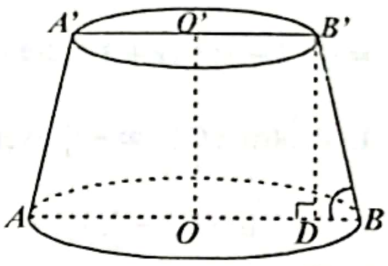


Fig. 2

15. a) Vezi **figura 2.**

b) Se duce $B'D\perp AB$. $\Delta B'DB$ este dreptunghic isoscel. Conform **teoremei lui Pitagora** $BD^2+B'D^{'2}=BB'^2$ și $2BD^2=BB'^2$ de unde $BD=B'D=10$ cm.

Cum $\frac{r}{2}=\frac{R}{3}$ și $R-r=BD=10$ atunci $R=30$ cm iar $r=20$ cm.

c) $\mathcal{A}_t=\pi G(R+r)+\pi R^2+\pi r^2=500\sqrt{2}\pi+900\pi+400\pi=500\sqrt{2}\pi+1300\pi$ (cm^2).

d) Volumul vasului cu aceste dimensiuni este $\mathcal{V}=\frac{\pi h}{3}\left(R^2+r^2+R\cdot r\right)=\frac{10\pi}{3}\cdot 1900=\frac{19000\pi}{3}$ (cm^3)

adică $\frac{19\pi}{3}$ dm^3 $=\frac{19\pi}{3}$ ℓ. Dar $\frac{19\pi}{3}<20$ implică $\pi<\frac{60}{19}$ pentru că $\frac{60}{19}>3{,}15$ și $\pi<3{,}15$.

VARIANTA 33

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	3	4	$\frac{4}{7}$	40	48	3	$36\sqrt{3}$	C	D	C	D

III. 13. Notăm cu x numărul elevilor și cu y numărul băncilor.

Atunci avem: $\begin{cases}y+6=x\\2\cdot(y-5)+1=x\end{cases}$. Acest sistem are soluția $x=21$ și $y=15$.

a) Sunt 15 bănci în clasă.

b) Sunt 21 de elevi în clasă.

14. a) $E(0)=\left(\frac{4}{9}-1\right):\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)=-\frac{5}{\cancel{9}}\cdot\frac{\cancel{9}}{1}=-5$.

b) $E(x)=\frac{x^2-4-x^2+9}{x^2-9}:\frac{x+3+x-3-1}{x^2-9}=\frac{5}{x^2-9}\cdot\frac{x^2-9}{2x-1}=\frac{5}{2x-1}$.

c) Expresia $E(a)=\frac{5}{2a-1}\in\mathbb{Z}$, dacă $2a-1/5$, deci pentru $2a-1\in\{-5;-1;1;5\}$ de unde $2a\in\{-4;0;2;6\}$ și $a\in\{-2;0;1;3\}$, dar ținând cont de condițiile de existență a expresiei avem: $a\in\{-2;0;1\}$

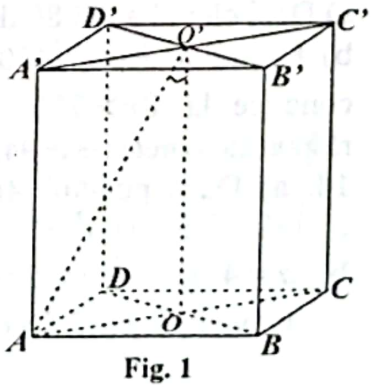


Fig. 1

15. a) Vezi **figura 1.**

b) $4L+4l+4h=60$. Cum $AC'^2=AB^2+BC^2+CC'^2$ și $AC'=9$ atunci $9^2=L^2+l^2+h^2$. Utilizăm formula: $(L+l+h)^2=L^2+l^2+h^2+2\cdot Ll+2\cdot Lh+2\cdot lh$. **(fig. 1)**

Prin înlocuire $(60:4)^2=81+2L\cdot l+2L\cdot h+2l\cdot h$.

Scanned with OKEN Scanner

Cum $\mathcal{A}_t = 2(L\cdot l + L\cdot h + l\cdot h)$ atunci $\mathcal{A}_t = 225 - 81 = 144\ \text{cm}^2$.

c) Dacă $AB = BC = 4$ cm înlocuind în $L + l + h = 15$ obținem $AA' = 7$ cm.

$\mathcal{P}_{ACC'A'} = 2(AC + CC') = 2\cdot 7 + 2\cdot 4\sqrt{2} = 14 + 8\sqrt{2}$ cm.

d) $pr_{(DBB')}O'A = O'O$ unde $\{O\} = BD \cap AC$, deoarece $AO \perp BD$ și $AO \perp OO'$. Prin urmare unghiul dintre dreapta AO' și planul (DBB') este $\sphericalangle AO'O$. Din $\Delta O'OA$ ($m(\sphericalangle O)=90°$) obținem

$$tg(\sphericalangle AO'O) = \frac{AO}{OO'} = \frac{2\sqrt{2}}{7}.$$

VARIANTA 34

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	0,11 sau...	22	204	180	$12\sqrt{2}$	40	144	A	C	C	B

III. 13. a) $0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; $0,1(6) = \frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$.

b) $\frac{a}{6} = \frac{b}{3}$ și $b\cdot\frac{1}{3} = c\cdot\frac{1}{6}$ deci se obține șirul de rapoarte egale $\frac{a}{6} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6} = k$ și $a = 6k, b = 3k, c = 6k$. Din $a^2 + b^2 + c^2 = 81$ rezultă $k^2 = 1, k = 1$. Deci $a = 6$, $b = 3$ și $c = 6$.

14. a) Pentru $x = 0$ găsim $f(0) = -2$, iar pentru $x = 3$, $f(3) = -1$. Atunci $B(0;-2)$ și $C(3;-1)$ sunt situate pe grafic. **(fig. 1)**

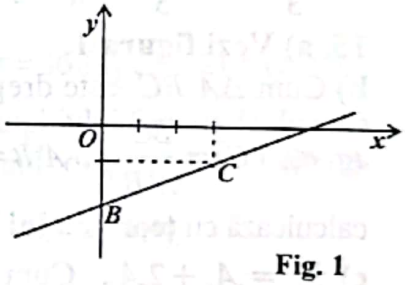


Fig. 1

b) Dacă $A(m;2) \in G_f$ atunci $f(m) = 2$. Înlocuind avem ecuația $\frac{1}{3}m - 2 = 2$ cu soluția $m = 12$.

c) $f(b) - f(a) + 2\cdot f\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{1}{3}b - 2 - \frac{1}{3}a + 2 + 2\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{a-b}{2} - 2\right] =$

$= \frac{b-a}{3} + \frac{a-b}{3} - 4 = -4$, deci este număr întreg.

15. a) Vezi **figura 2.**

b) Piramida $ACD'B'$ are toate muchiile congruente, de lungime $4\sqrt{2}$ cm. Atunci $\mathcal{A}_t = 4\cdot\frac{32\sqrt{3}}{4} = 32\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

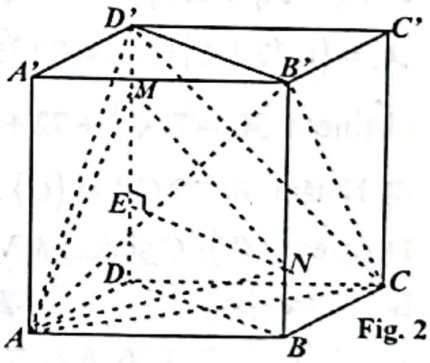


Fig. 2

c) Fie $E \in [DD']$ astfel încât $DE = 1$. Din ΔMEN cu $m(\sphericalangle MEN) = 90°$, aplicând **teorema lui Pitagora** se află $MN = 6$ cm. **(fig. 2)**

d) ΔAMN are lungimile laturilor: $MN = 6$ cm, $AN = \sqrt{17}$ cm (din triunghiul dreptunghic ABN), $AM = 5$ cm (din triunghiul dreptunghic ADM). Triunghiul AMN este triunghi oarecare. Se calculează o înălțime. Fie $AQ = x$; $QM = 5 - x$.

Cum $NQ^2 = MN^2 - MQ^2 = AN^2 - AQ^2$ obținem $x = \frac{3}{5}$ și apoi

$NQ = \frac{4\sqrt{26}}{5}$. $\mathcal{A}_{\Delta AMN} = 2\sqrt{26}\ \text{cm}^2$.

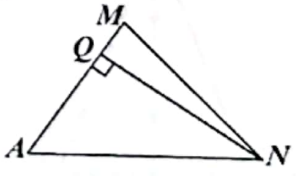


Fig. 3

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 35

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	8	6	{2}	28	$5\sqrt{2}$	24	12	B	A	D	D

III. 13. Notăm cu x prețul inițial și cu y prețul după majorare. Avem relațiile: $\frac{115}{100}\cdot x = y$ și $\frac{85}{100}\cdot y = 195{,}5$. Din a doua relație obținem $y = 230$ și apoi din prima $x = 200$.

a) Prețul inițial a fost de 200 lei.

b) După majorare obiectul a costat 230 lei.

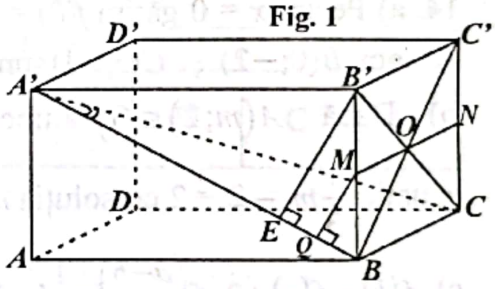
14. a) Cum $f(1) = 2 - \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2$, atunci $A(1;2) \in G_f$.

b) Inecuația $f(x) - 2 \geq 0$ este echivalentă cu $(2-\sqrt{5})x + \sqrt{5} - 2 \geq 0$, de unde $(\sqrt{5}-2)x \leq \sqrt{5}-2$, cum $\sqrt{5} - 2 > 0$, avem soluție $x \leq 1$. Deci $x \in (-\infty; 1]$.

c) Trebuie ca $(2-\sqrt{5})a + \sqrt{5} = b + b\sqrt{5}$, de unde $(b + a - 1)\sqrt{5} = 2a - b$. Cum $a, b \in \mathbb{Q}$ trebuie ca $b + a - 1 = 2a - b = 0$, rezultând că $b + a = 1$ și $2a = b$, sistem care are soluția $a = \frac{1}{3}$ și $b = \frac{2}{3}$.

15. a) Vezi **figura 1**.

Fig. 1



b) Cum $\Delta A'BC$ este dreptunghic în B, atunci $tg(\sphericalangle BA'C) = \frac{BC}{A'B}$ și $A'B = 6\sqrt{3}$ cm iar apoi din $\Delta A'AB$ se calculează cu **teorema lui Pitagora** $AA' = 6$ cm. **(fig. 1)**

c) $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_B$. Cum $\mathcal{A}_l = 2(AB + BC)\cdot AA'$ atunci $\mathcal{A}_l = (6\sqrt{2}+6)\cdot 2\cdot 6 = 72\sqrt{2} + 72$ iar cum $\mathcal{A}_b = AB \cdot BC$ atunci $\mathcal{A}_B = 6\sqrt{2}\cdot 6 = 36\sqrt{2}$ obținem $\mathcal{A}_t = 72\sqrt{2} + 72 + 72\sqrt{2} = 144\sqrt{2} + 72 = 72(2\sqrt{2}+1)\text{cm}^2$.

d) Notăm $BC' \cap CB' = \{O\}$. Fie M și N mijloacele muchiilor $[BB']$ și $[CC']$. $O \in [MN]$. Deoarece $MN \| BC$ și deci $MN \| (A'BC)$, $d(O;(A'BC)) = d(M;(A'BC)) = MQ$ $(MQ \perp A'B)$. Se duce și $B'E \perp A'B$. Cum MQ este linie mijlocie în $\Delta B'EB$ avem că $MQ = \frac{1}{2}B'E = \frac{1}{2}\cdot\frac{6\cdot 6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = \sqrt{6}$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 36

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
16,5	−4	2	28	360	28	25	5	D	B	C	B

III. 13. a) Cele trei persoane cântăresc împreună 195 kg.

b) Pachetele pot cântări împreună cel mult 240 – 195 = 45 kg, deci un pachet poate cântări cel mult 15 kg.

14. a) $E(x)=(x+3+x-4)^2=(2x-1)^2$.

b) $E(\sqrt{2})=\left(2\sqrt{2}-1\right)^2$ şi $E(-\sqrt{2})=\left(-2\sqrt{2}-1\right)^2=\left(2\sqrt{2}+1\right)^2$.

Obţinem $E(\sqrt{2})\cdot E(-\sqrt{2})=\left(2\sqrt{2}-1\right)^2\cdot\left(2\sqrt{2}+1\right)^2=\left[\left(2\sqrt{2}\right)^2-1^2\right]^2=7^2=49$.

c) $E(a)=(2a-1)^2\geq 0$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, deci valoarea minimă a lui $E(a)$ este 0 şi se obţine când $a=\frac{1}{2}$.

15. a) Vezi **figura 1.**

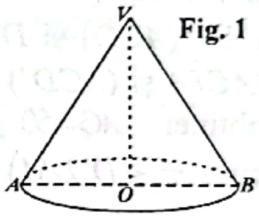


Fig. 1

b) $\mathcal{A}_t=\mathcal{A}_b+\mathcal{A}_l$. Dar $\mathcal{A}_b=\pi\cdot R^2$. Din triunghiul dreptunghic VAO se obţine $AO=6\sqrt{3}=R$ (**Pitagora**). (**fig. 1**) Deci $\mathcal{A}_b=\pi\cdot\left(6\sqrt{3}\right)^2=108\pi$ (cm^2).

$\mathcal{A}_l=\pi\cdot RG=6\sqrt{3}\cdot 12\pi=72\sqrt{3}\pi$ cm^2, de unde $\mathcal{A}_t=36\left(3+2\sqrt{3}\right)\cdot\pi=36\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+2\right)\pi$ (cm^2).

c) Proiecţia dreptei VA pe planul bazei este dreapta OA deci măsura unghiului format de dreapta VA cu planul bazei este măsura unghiului $\sphericalangle VAO$. Din triunghiul dreptunghic VAO cu $VO=\frac{1}{2}VA$ se obţine $m(\sphericalangle VAO)=30°$ (**teorema reciprocă a unghiului de 30°**).

d) $\mathcal{V}_{con}=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(6\sqrt{3}\right)^2\cdot 6=216\pi$, deci $\mathcal{V}_{con}=216\pi$ cm$^3\simeq 678{,}24$ cm$^3=$

$=0{,}67824$ dm$^3=0{,}67824\ \ell>0{,}5\ \ell$. Deci în această vază încap 0,5 ℓ de apă.

VARIANTA 37

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11	a	[3;7]	0, 7, 14, 21...	36	24	96	150	C	D	B	D

III. 13. a) Notez cu a numărul fetelor şi cu b numărul băieţilor. Din $a-30=b-6$ implică $a-b=24$, dar $a=2b$ de unde $a=48$ şi $b=24$, deci sunt 48 de fete.

b) Au participat $48+24=72$ elevi. $\frac{p}{100}$ din $72=18$ de unde $p=25$.

14. a) **Fig. 1.**

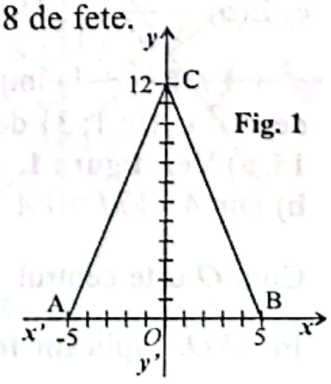


Fig. 1

b) $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{CO\cdot AB}{2}=\frac{12\cdot 10}{2}=60$ (u.a.) unde

$AB=AO+OB=|-5|+|5|=10$.

Scanned with OKEN Scanner

c) $A(-5;0)\in G_f$ implică $f(-5)=0$ dar $f(-5)=-5a+b$, de unde $-5a+b=0$. Din $C(0;12)\in G_f$ rezultă că $f(0)=12$, dar $f(0)=b$ deci $b=12$. Din $-5a+12=0$ obţin $a=2,4$; deci $f(x)=2,4x+12$.

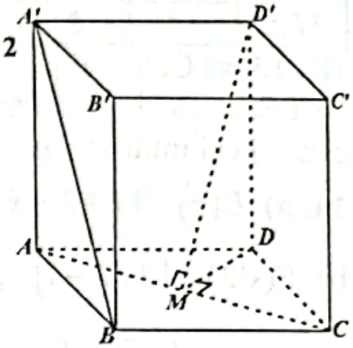


Fig. 2

15. a) Vezi **figura 2.**

b) $\mathcal{A}_l=P_b\cdot h$, unde P_b este perimetrul bazei $=2\cdot(AB+AD)=$ $=2\cdot 70=140$ (cm). De unde $\mathcal{A}_l=140\cdot 24=3360$ (cm^2).

c) Din $A'A\perp(ABC)$ şi $AB\perp BC$ cu $AB,BC\subset(ABC)$ rezultă că $A'B\perp BC$ (**teorema celor trei perpendiculare**), deci distanţa de la punctul A' la BC este lungimea segmentului $A'B$. Din triunghiul dreptunghic $AA'B$ rezultă că $A'B^2=AB^2+A'A^2$ de unde $A'B=6\sqrt{41}$ (**Pitagora**).

d) Construim $DM\perp AC$, $M\in AC$, cum $D'D\perp(ACD)$ şi DM, $AC\subset(ACD)$, rezultă că $D'M\perp AC$ (**teorema celor trei perpendiculare**). Din $(ACD)\cap(ACD')=AC$, $DM\perp AC$, $DM\subset(ACD)$ şi $D'M\perp AC$, $D'M\subset(ACD')$ rezultă că măsura unghiului format de planele (ACD) şi (ACD') este egală cu măsura unghiului DMD'. În triunghiul dreptunghic ADC obţinem $AC=50$ (**Pitagora**) şi $DM=24$ (**teorema a doua a înălţimii**) dar $DD'=24$ şi cum $m(\sphericalangle D'DM)=90°$ rezultă că $\Delta D'MD$ este dreptunghic isoscel deci $m(\sphericalangle DMD')=45°$.

VARIANTA 38

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
18	20	72	7	150	$9\sqrt{3}$	64	200	C	D	C	A

III. 13. a) Deoarece oricare două buchete nu conţin acelaşi număr de garoafe albe, buchetele pot conţine: 0, 1, 2, 3, 4 sau 5 garoafe albe.

b) Avem 3 cazuri favorabile, şi 6 cazuri egal-posibile iar probabilitatea ca mama să primească un buchet cu cel puţin 3 garoafe roşii este $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

14. a) Avem: $E(x)=\frac{x+1}{x^2+1}:\left(\frac{x+3}{4(x-1)}-\frac{1}{x-1}\right)\cdot\frac{x+1-1}{x+1}=\frac{\cancel{x+1}}{x^2+1}\cdot\frac{4(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}}\cdot\frac{x}{\cancel{x+1}}=\frac{4x}{x^2+1}$.

b) $E(x)\cdot(x^2+1)\le 1$ implică $\frac{4x}{\cancel{x^2+1}}\cdot(\cancel{x^2+1})\le 1$. Se obţine $x\le\frac{1}{4}$ adică $x\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$.

c) $E(a)=\frac{4a}{a^2+1}$. Deci $\frac{4a}{a^2+1}\in\mathbb{Z}$ dacă $a^2+1\,/\,4a$, de unde rezultă că $a^2+1\,/\,4^2$, şi cum $a^2+1\,/\,4(a^2+1)$ implică $a^2+1\,/\,4$, adică $a^2+1\in\{1;2;4\}$, deci $a^2\in\{0;1;3\}$ de unde $a\in\{-1;0;1\}$.

15. a) Vezi **figura 1.**

b) Din $4\cdot VM=VA=12$ avem $VM=3$ cm, deci $AM=9$ cm.

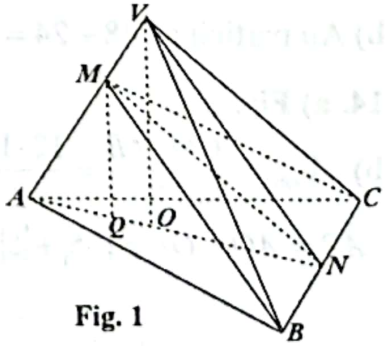


Fig. 1

Cum O este centrul bazei, avem $AO=R=\frac{l\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$ cm.

În ΔVOA aplicăm **teorema lui Pitagora** şi obţinem $VO^2=$

Scanned with OKEN Scanner

$= VA^2 - AO^2$ adică $VO^2 = 12^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2$, de unde $VO = 4\sqrt{6}$ cm. Construim $MQ \perp AO$, $Q \in AO$, deci $MQ \parallel VO$. În ΔAOV, $MQ \parallel VO$ şi rezultă conform **teoremei fundamentale a asemănării** că $\Delta AQM \sim \Delta AOV$, de unde avem: $\frac{AM}{AV} = \frac{AQ}{AO} = \frac{MQ}{VO}$, adică $\frac{9}{12} = \frac{AQ}{4\sqrt{3}} = \frac{MQ}{4\sqrt{6}}$ şi obţinem: $MQ = 3\sqrt{6}$ cm, $AQ = 3\sqrt{3}$ cm.

Dar AN este înălţime în ΔABC echilateral, deci $AN = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm. **(fig. 1)**

În ΔAMN, (MQ) este mediană şi înălţime rezultă că ΔAMN este isoscel cu $AM = MN = 9$ cm.

c) Avem $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$, $A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$ cm^2, deci $V = \frac{1}{3} \cdot 36\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{6} = 144\sqrt{2}$ cm^3.

d) Din $BC \perp VN$, $BC \perp NA$, VN şi NA incluse în planul VAN avem: $BC \perp (VAN)$ şi cum $MN \subset (VAN)$ implică $BC \perp MN$. Avem: $(MBC) \cap (ABC) = BC$, $MN \perp BC$, $MN \subset (MBC)$, $AN \perp BC$, $AN \subset (ABC)$, de unde rezultă că unghiul format de planele (MBC) şi (ABC) este unghiul ANM. În ΔMQN dreptunghic în Q aplicăm $\sin \sphericalangle ANM = \frac{MQ}{MN} = \frac{3\sqrt{6}}{9} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

VARIANTA 39

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	9876	2	9	$(3; \infty)$	5	$12\sqrt{3}$	63	D	A	C	D

III. 13. a) După prima scumpire preţul este de $250 + \frac{10}{100} \cdot 250 = 275$ lei.

b) $275 + \frac{p}{100} \cdot 275 = 250 + 80$, de unde $\frac{p}{100} \cdot 275 = 55$, adică $p = 20$.

14. a) $f(0) = -1$, de unde $A(0;-1) \in G_f$, $f(x) = 0$ deci $x = 1$ de unde $B(1;0) \in G_f$, $g(0) = 3$ de unde $C(0;3) \in G_g$, $g(x) = 0$ implică $3 - 2x = 0$, adică $x = \frac{3}{2}$, de unde $D\left(\frac{3}{2};0\right) \in G_g$.

b) $G_f \cap G_g = \{M(x;y)\}$ **(fig. 1)** rezultă că $M(x;y) \in G_f$ adică $f(x) = y$ şi $M(x;y) \in G_g$, adică $g(x) = y$, de unde rezultă că $f(x) = g(x)$ adică $x - 1 = 3 - 2x$, deci $x = \frac{4}{3}$, iar $y = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}$, deci $M\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$. $\mathcal{A}_{BMCO} = \mathcal{A}_{AMC} - \mathcal{A}_{AOB}$. Din $\mathcal{A}_{AMC} = \frac{MN \cdot AC}{2} = \frac{\frac{4}{3} \cdot 4}{2} = \frac{8}{3}$ şi $\mathcal{A}_{AOB} = \frac{AO \cdot OB}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ rezultă că $\mathcal{A}_{BMCO} = \frac{8}{3} - \frac{1}{4} = \frac{13}{6}$ (u.a.).

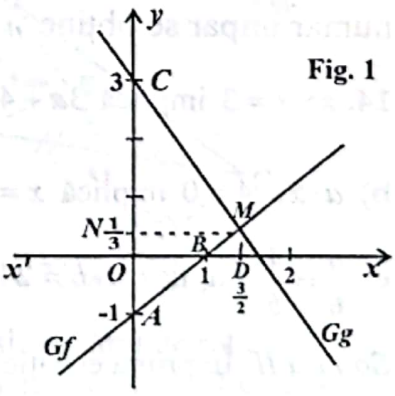


Fig. 1

c) $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{a-1}{3-2a} \in \mathbb{Z}$ implică $3 - 2a / a - 1$ de unde $3 - 2a / 2a - 2$ dar $3 - 2a / 3 - 2a$ rezultă

Scanned with OKEN Scanner

$3-2a/1$, adică $3-2a\in\{-1;1\}$, de unde $a\in\{1;2\}$.

15. a) Fig. 2.

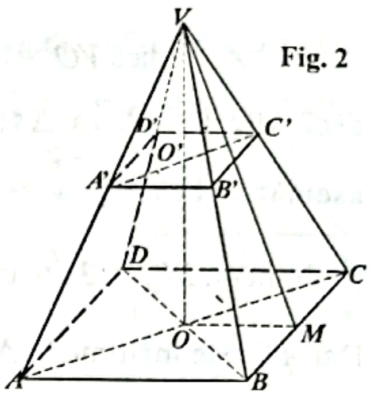


Fig. 2

b) $V=\frac{1}{3}\mathcal{A}_b\cdot h$. Cum $\mathcal{A}_b=l^2=\left(12\sqrt{3}\right)^2=432\,\text{cm}^2$, iar $OM=\frac{l}{2}=6\sqrt{3}$. Din triunghiul dreptunghic VOM (**fig. 2**) obținem VO=6 cm (**Pitagora**). Obținem $V=\frac{1}{3}\cdot 432\cdot 6$, adică $V=864\,\text{cm}^3$.

c) Din $(VBC)\cap(ABC)=BC$, cum $VM\perp BC$, $VM\subset(VBC)$ iar $OM\perp BC$, $OM\subset(ABC)$ rezultă că măsura unghiului format de planele (VBC) și (ABC) este egală cu $m(\sphericalangle VMO)$. În triunghiul dreptunghic VMO, $VO=\frac{1}{2}VM$, aplicând **teorema reciprocă a unghiului de 30°** se obține $m(\sphericalangle VMO)=30°$.

d) $\frac{\mathcal{A}_{l[VA'B'C'D']}}{\mathcal{A}_{l[VABCD]}}=\left(\frac{VO'}{VO}\right)^2$ dar $\frac{\mathcal{A}_{ABCDA'B'C'D'}}{\mathcal{A}_{l[VABCD]}}=\frac{75}{100}$ de unde $\frac{\mathcal{A}_{l[VA'B'C'D']}}{\mathcal{A}_{l[VABCD]}}=\frac{1}{4}$ rezultă că $\frac{VO'}{VO}=\frac{1}{2}$, deci VO'=3 cm, de unde OO'=3 cm. Deci distanța de la planul bazei piramidei la planul de secțiune este de 3 cm.

VARIANTA 40

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
37	8	1	−2	14	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	216	B	C	C	A

III. 13. a) $x=7\cdot 0-11+3\cdot(-1)^{0+1}$ de unde $x=-14$ iar $y=7\cdot 0+18-3\cdot(-1)^0$ de unde $y=15$, se obține $x-y=-29$.

b) x/y implică $7n-11-3\cdot(-1)^n/7n+18-3\cdot(-1)^n$ dar $7n-11-3\cdot(-1)^n/7n-11-3\cdot(-1)^n$ de unde $7n-11-3\cdot(-1)^n/29$ adică $7n-11-3\cdot(-1)^n\in\{-29;-1;1;29\}$ de unde $7n-11-3\cdot(-1)^n\in\{-18;10;12;40\}$. Pentru n număr par obținem $n\in\varnothing$ iar pentru n număr impar se obține $n\in\{-3;1\}$.

14. a) $x=3$ implică $3a+4=0$ deci $a=-\frac{4}{3}$; iar $6\cdot 3+b=0$ de unde $b=-18$.

b) $a\cdot x+4=0$ implică $x=-\frac{4}{a}\in\mathbb{N}$ de unde $a\in\{-4;-2;1\}$.

c) $\frac{a}{6}=\frac{4}{b}$ implică $a\cdot b=24$.

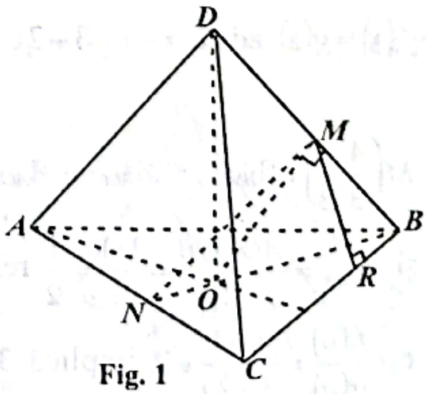


Fig. 1

Soluția II: În prima ecuație avem $x=-\frac{4}{a}$, iar din a doua ecuație $x=\frac{b}{-6}$. Din $\frac{-4}{a}=\frac{b}{-6}$ avem $a\cdot b=24$.

15. a) Vezi **figura 1**.

Scanned with OKEN Scanner

b) Notez $AB=a$ de unde $OB=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Din triunghiul dreptunghic DOB obținem $DO=\frac{a\sqrt{6}}{3}$ (**Pitagora**). Aplicând teorema catetei în triunghiul dreptunghic DOB obținem $OB^2=MB\cdot DB$, de unde $MB=\frac{a}{3}$. Construim $MR\perp BC$, $R\in BC$. În triunghiul dreptunghic MRB unghiul B are măsura de 60°, obținem $BR=\frac{a}{6}(\cos 60°)$ și $MR=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, de unde $RC=BC-BR$ adică $RC=\frac{5a}{6}$. În triunghiul dreptunghic MRC rezultă $MR^2+RC^2=MC^2$, de unde $a=6$, adică $AB=6$ cm. **(fig. 1)**

c) $V=\frac{1}{3}\cdot\mathcal{A}_b\cdot h$ unde $\mathcal{A}_b$ este aria bazei și $\mathcal{A}_b=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=\frac{6^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}$ iar $h=DO=\frac{6\sqrt{6}}{3}=2\sqrt{6}$. Rezultă că $V=\frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{6}$ deci $V=18\sqrt{2}$ cm^3.

d) Fie $\{N\}=BO\cap AC$. Din $DO\perp(ABC)$ și $CN\subset(ABC)$ rezultă că $DO\perp CN$, adică $CN\perp DO$, dar $CN\perp BO$, iar DO și $BO\subset(BOD)$ de unde $CN\perp(BOD)$ rezultă că proiecția dreptei CM pe planul BOD este NM deci măsura unghiului format de CM și (BOD) este egală cu măsura unghiului CMN pe care o notez cu $u°$. În triunghiul dreptunghic CMN $\sin u=\frac{NC}{MC}=\frac{3}{2\sqrt{7}}$ deci $\sin u=\frac{3\sqrt{7}}{14}$.

VARIANTA 41

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
16	$\frac{21}{8}$	20	280	90	10	30	75	**D**	**B**	**C**	**C**

I. 1. $4+2\cdot 6=16$; **2.** $\frac{7}{8}\cdot 3=\frac{21}{8}$; **3.** De la ora 12^{40} până la ora 13^{00} sunt 20 minute.

4. $\frac{20}{100}\cdot 1400=20\cdot 14=280$ lei; **5.** $m(A\hat{C}B)=90°$

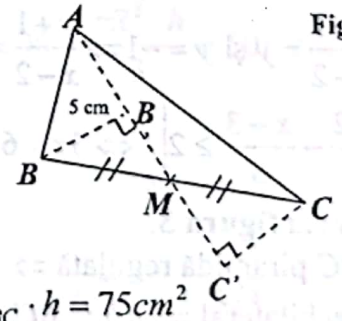


Fig. 1

6. $\Delta BB'M\equiv\Delta CC'M$ (I.U.) **(fig. 1)**

$\left.\begin{array}{l}(BB')\equiv(CC'),\\ \text{Dar } BB'=5\,\text{cm}\end{array}\right\}$ deci $CC'=5\,\text{cm}\Rightarrow d(C,AM)=5\,\text{cm}$.

7. $V_{con}=\frac{\pi R^2\cdot h}{3}=\frac{\pi\cdot 9cm^2\cdot 10cm}{3}=30\pi\ cm^3$; **8.** $A_{lat}=P_{\Delta ABC}\cdot h=75cm^2$

II. 9. Dacă am presupune că ar fi 9 autoturisme atunci am depăși numărul de roți. Deci sunt mai putin de 9 autoturisme. Dar $8\cdot 4=32\Rightarrow$ pot fi 8 autoturisme. Răspuns **D.**

10. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{30}:\left(-\frac{1}{3}\right)^{32}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}=(-3)^2=9\Rightarrow$ răspuns **B.**

Scanned with OKEN Scanner

11. $r=\frac{l\sqrt{3}}{6}\Rightarrow 4cm=\frac{l\sqrt{3}}{6}\Rightarrow l=\frac{24cm}{\sqrt{3}}\Rightarrow l=\frac{24\sqrt{3}}{3}cm\Rightarrow l=8\sqrt{3}cm\Rightarrow$ răspuns **C.**

12. Fie $BD\perp AC, D\in AC$. (**fig. 2**)

$$\left.\begin{array}{l} m(B\hat{A}C)=60^\circ \\ m(A\hat{D}B)=90^\circ \end{array}\right\}\Rightarrow m(A\hat{B}D)=30^\circ\Rightarrow AD=\frac{AB}{2}\Rightarrow AD=3\Rightarrow$$

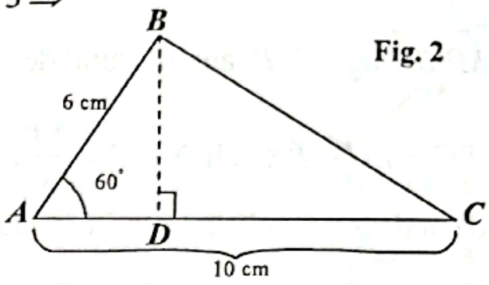


Fig. 2

$\Rightarrow BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{36-9}$ deci

$BD=3\sqrt{3}$, iar $DC=AC-AD=7\underset{\Delta BDC}{\overset{T.Pitagora}{\Rightarrow}} BC^2=49+27$

$BC=\sqrt{76}=\sqrt{4\cdot 19}=2\sqrt{19}\Rightarrow$ răspuns **C.**

III. 13. a) Se ştie că $16<18\Rightarrow\sqrt{16}<\sqrt{18}\Rightarrow 4<3\sqrt{2}\Big|_{+4}\Rightarrow 8<4+3\sqrt{2}\Big|_{:2}\Rightarrow 4<\frac{4+3\sqrt{2}}{2}$ **(1)**

Dar $18>16\Rightarrow\sqrt{18}>\sqrt{16}\Rightarrow 3\sqrt{2}>4\Big|_{+3\sqrt{2}}\Rightarrow 6\sqrt{2}>4+3\sqrt{2}\Big|_{:2}\Rightarrow 3\sqrt{2}>\frac{4+3\sqrt{2}}{2}$ **(2)**

Din relaţiile **(1)** şi **(2)** $\Rightarrow 4<\frac{4+3\sqrt{2}}{2}<3\sqrt{2}\Rightarrow\frac{4+3\sqrt{2}}{2}\in(4;3\sqrt{2})$.

b) Fie $\sqrt{n}$ numărul căutat $\Rightarrow 4<\sqrt{n}<3\sqrt{2}\Rightarrow 4^2<n<(3\sqrt{2})^2\Rightarrow 16<n<18\Rightarrow n=17$, deci numărul căutat este $\sqrt{17}$.

14. a) $2x^2-5x+3=0$, de unde $a=2, b=-5, c=3$ şi $\Delta=b^2-4ac=25-24=1$.

Cum $\Delta>0$ rezultă $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+1}{4}=\frac{3}{2}$ şi $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-1}{4}=1$.

b) $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-2}{x+1}+2=0$; $C.E.\begin{cases} x+1\neq 0 \\ x-2\neq 0 \end{cases}\Rightarrow x\in\Re-\{-1,2\}$; Notăm $\frac{x+1}{x-2}=y$

Ecuaţia devine $y+\frac{1}{y}+2=0\Rightarrow y^2+2y+1=0\Rightarrow(y+1)^2=0\Rightarrow y=-1$

Dar $\frac{x+1}{x-2}=y$ şi $y=-1\Rightarrow\frac{x+1}{x-2}=-1\Rightarrow x+1=-x+2\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}-\{-1,2\}\sqrt{b^2-4ac}$

c) $\frac{x+2}{2}-\frac{x-3}{3}\geq 2\Big|_{\cdot 6}\Leftrightarrow 3x+6-2x+6\geq 12\Rightarrow x\geq 0\Rightarrow x\in[0,+\infty)$

15. a) Vezi **figura 3**.

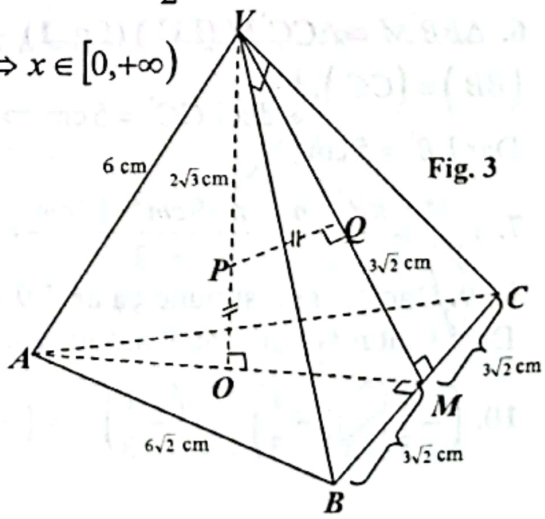


Fig. 3

b) $VABC$ piramidă regulată $\Rightarrow VA=VB=VC=6$cm

ΔABC echilateral $\Rightarrow AB=BC=CA=6\sqrt{2}$ cm

Deci în ΔVBC avem $\left.\begin{array}{l} VB=VC=6 \\ BC=6\sqrt{2} \end{array}\right\}\overset{R.T.Pitagora}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow\Delta VBC$ dreptunghic în V. Dar VM mediana din unghiul drept în triunghi dreptunghic $\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow VM = \frac{BC}{2} = 3\sqrt{2}$ cm. (**fig. 3**)

OM = raza cercului înscris în $\Delta ABC \Rightarrow OM = \frac{l\sqrt{3}}{6} = \sqrt{6}$ cm

În ΔVOM avem: $m(\hat{O}) = 90^\circ$, $OM = \sqrt{6}$ şi $VM = 3\sqrt{2}$ implică

$VO = \sqrt{VM^2 - OM^2} = 2\sqrt{3}$ cm (**Pitagora**).

$A_{\Delta ABC} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{4} cm^2 = 18\sqrt{3}$ cm^2; $V_{VABC} = \frac{A_{\Delta ABC} \cdot VO}{3} = \frac{18\sqrt{3}cm^2 \cdot 2\sqrt{3}cm}{3} = 36$ cm^3

c) $BC \perp VM$, $BC \perp AM$ şi $VM \cap AM = \{M\}$ implică $BC \perp (VAM)$ şi cum $VA \subset (VAM)$ avem $VA \perp BC$.

d) Fie $P \in VO$ astfel încât P este egal depărtat de toate feţele piramidei şi fie $PQ \perp MV$, $Q \in VM$.

Dar $\left.\begin{matrix} BC \perp (VAM) \\ PQ \subset (VAM) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} PQ \perp BC \\ PQ \perp MV \\ BC \cap MV = \{M\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow PQ \perp (VBC) \Rightarrow d(P,(VBC)) = PQ$, iar

$d(P,(ABC)) = PO$, deci $(PQ) = (PO)$. Cum ΔVQP, ΔVOM sunt dreptunghice cu vârful

$\hat{V}$ comun $\overset{(u.u)}{\Rightarrow} \Delta VQP \sim \Delta VOM \Rightarrow \frac{VP}{VM} = \frac{PQ}{OM} = \frac{VQ}{VO} \Rightarrow \frac{VO - OP}{VM} = \frac{PQ}{OM} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2\sqrt{3} - OP}{3\sqrt{2}} = \frac{OP}{\sqrt{6}} \Rightarrow 6\sqrt{2} - OP\sqrt{6} = 3\sqrt{2}OP \Rightarrow OP = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}(3+\sqrt{3})} = 3 - \sqrt{3}$.

VARIANTA 42

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	10	3	7,3	0,2	60	50	$6\sqrt{3}$	**C**	**B**	**D**	**D**

I. 1. $2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$; **2.** $x - 4 = 6 \Rightarrow x = 6 + 4 \Rightarrow x = 10$; **3.** 12 lei : 4 = 3 lei preţul unui pix;

4. 7,3 > 7,23; **5.** 2000m^2 = 0,2ha; **6.** $P_\square$ = 2L + 2l = 60cm; **7.** $V = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3} = 50\pi$ cm^3;

8. $d = l\sqrt{3} \Rightarrow d = 6\sqrt{3}$ cm.

II. 9. 4 muncitori.....12 ore
1 muncitor .....48 ore
3 muncitori.....16 ore $\Rightarrow$ răspuns **C.**

10. $\frac{a}{2} = \frac{15}{b} \Rightarrow ab = 30 \Rightarrow N = 30 - 20 \Rightarrow N = 10 \Rightarrow$ răspuns **B.** **11.** $r = \frac{l\sqrt{3}}{6} \Rightarrow r = \frac{6\sqrt{3}}{6} \Rightarrow r = \sqrt{3}$ cm;

Răspuns: **D.** **12.** Linia mijlocie este semisuma bazelor $\Rightarrow$ suma bazelor este 24 cm. O latură neparalelă este 12 : 3 = 4cm $\Rightarrow$ P = 24cm + 2 · 4cm = 32cm. Răspuns corect: **D.**

III. 13. a) $P = \frac{\text{nr. cazurilor favorabile}}{\text{nr. cazurilor egal-posibile}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) 5 bile pentru că chiar dacă primele 4 bile extrase sunt albe, la a cincea extragere, în urnă, nu mai am decât bile roşii.

14. a) Figura 1.

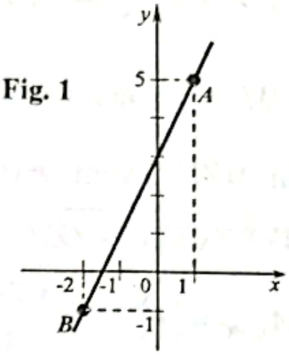


Fig. 1

b) $\left.\begin{array}{l} A(1,5)\in G_f \Rightarrow f(1)=5 \\ Darf\,(1)=a+b \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=5.$

$\left.\begin{array}{l} B(-2,-1)\in G_f \Rightarrow f(-2)=-1 \\ Darf\,(-2)=-2a+b \end{array}\right\} \Rightarrow -2a+b=-1.$

Rezolvând sistemul obținut, avem $a = 2$; $b = 3$..

c) Pentru $a = 2$ şi $b = 3$, $f(x) = 2x + 3$.

$$f(x)\in[-5,6]\Rightarrow -5\le 2x+3\le 6\,\big|_{-3}\Rightarrow -8\le 2x\le 3\,\big|_{:2}\Rightarrow -4\le x\le \frac{3}{2}\Rightarrow x\in\left[-4;\frac{3}{2}\right].$$

15. a) Vezi **figura 2.**

b) Fie $A'Q \parallel OO'$, $Q \in (AC)$. Avem $CAA'C'$ trapez isoscel în care $A'C' = 8\sqrt{2}$ iar $AC = AB\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ cm.

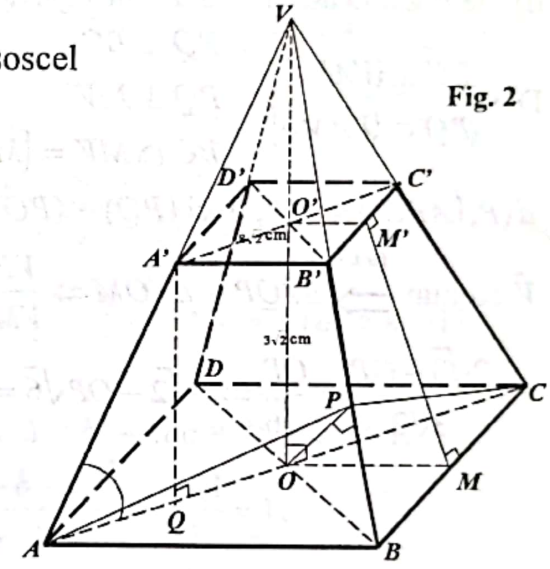


Fig. 2

$$AQ=\frac{AC-A'C'}{2}\Rightarrow AQ=2\sqrt{2}\text{ cm. (fig. 2)}$$

În $\Delta A'QA$, $m(\hat{Q})=90^\circ \Rightarrow tg(A'\hat{A}C)=\frac{A'Q}{AQ}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}=\frac{A'Q}{2\sqrt{2}}\Rightarrow A'Q=3\sqrt{2}\Rightarrow OO'=3\sqrt{2}\text{ cm.}$$

c) OM apotemă în pătrat $\Rightarrow OM = 6$ cm.

$A'C' = A'B'\sqrt{2} \Rightarrow A'B'\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \Rightarrow A'B' = 8$ cm,

de unde $O'M' = 4$cm.

Fie $M'R \perp OM$, $R \in OM$; (**fig.** 3) $RM = OM - OR = OM - O'M' = 2$ cm.

$M'R = 3\sqrt{2}$ cm. În $\Delta M'MR$ aplic **T. Pitagora** $\Rightarrow$

$$\Rightarrow M'M=\sqrt{22}\Rightarrow a_l=\sqrt{22}\Rightarrow A_l=\frac{(P_B+P_b)\cdot a_l}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_l=\frac{80\cdot\sqrt{22}}{2}=40\sqrt{22}\text{ cm}^2.$$

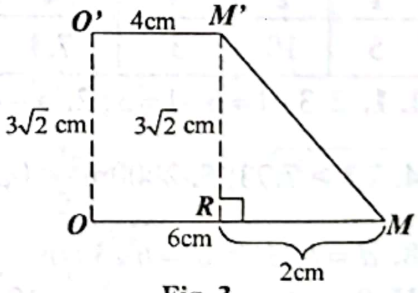


Fig. 3

d) Fie $P \in VB$. Cum $\Delta ABP \equiv \Delta CBP \Rightarrow (AP) \equiv (PC) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta APC$ este isoscel ; PO mediana $\Rightarrow PO$ înălțime.

Cum $A_{\Delta APC}=\frac{PO\cdot AC}{2}$, $AC =$ constantă, iar $A_{\Delta APC} =$ minimă rezultă PO minim dacă $PO \perp VB$.

$$O'B'\parallel OB\Rightarrow \Delta VO'B'\sim\Delta VOB\Rightarrow \frac{VO'}{VO}=\frac{O'B'}{OB}\Rightarrow \frac{VO'}{VO'+3\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}=\frac{2}{3}\Rightarrow VO'=6\sqrt{2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow VO = 9\sqrt{2}$. În ΔVOB: $VB^2 = VO^2 + OB^2$ (t. **Pitagora**), de unde $VB = 3\sqrt{26}$ cm.

$BP=\frac{12\sqrt{26}}{13}$ cm (din teorema catetei în ΔOBV, $OB^2 = BP \cdot VB$).

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 43

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
9	1 sau 2 sau 4 sau 8	4	b	30	15	160	15	**D**	**D**	**B**	**B**

I. 1. $3^2 = 9$; **2.** $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$; **3.** $\frac{10}{100} \cdot 40 = 4$; **4.** $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$; **5.** 3 dal = 30 l; **6.** $\mathcal{P}_{\Delta ABC} = 3l = 15$ cm;

7. $V_{prismă} = l^2 \cdot h = 16 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 160 \text{ cm}^2$; **8.** $\mathcal{A}_{lcon} = \pi RG = 3 \cdot 5 \cdot \pi = 15\pi$.

II. 9. $3x^2 + x - 4 = 0$ rezultă $\Delta = 49$; $x_1 = \frac{-1+7}{6} = 1$; $x_2 = \frac{-1-7}{6} = \frac{-4}{3} \Rightarrow$ răspuns **D.**

10. De la 10 la 99 sunt 90 de numere din care eliminăm pe 11; 22; 33; ...; 99, adică 9 numere $\Rightarrow$ Sunt 81 de elemente în $M \Rightarrow$ răspuns **D.**

11. Exprimăm aria rombului în 2 moduri:

$$\left.\begin{aligned} A_{romb} &= l^2 \sin 30^\circ = 256 \cdot \frac{1}{2} = 128 \\ A_{romb} &= l \cdot h = 16h \end{aligned}\right\} \Rightarrow h = 8 \Rightarrow \text{răspuns } \mathbf{B}.$$

12. Dreptunghi, deoarece în patrulaterul obținut diagonalele se înjumătățesc și au aceeași lungime $\Rightarrow$ răspuns **B.**

III. 13. a) $\{a,b,c\}$d.p.$\{1,2,5\} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{5} = k \Rightarrow a = k; b = 2k; c = 5k \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1}{5}$

b) $\frac{a+b+c}{3} = 16 \Rightarrow \frac{k+2k+5k}{3} = 16 \Rightarrow 8k = 48 \Rightarrow k = 6 \Rightarrow a = 6; b = 12; c = 30 \Rightarrow$

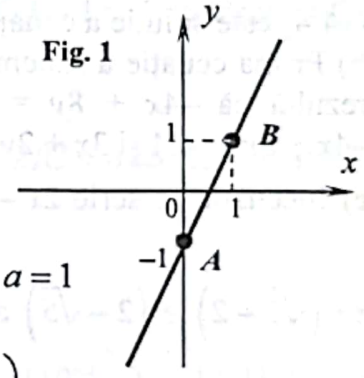
$\Rightarrow d = 6 \Rightarrow 2^k < 6 < 2^{k+1} \Rightarrow 2^k \le 4 < 6 < 8 \le 2^{k+1} \Rightarrow k = 2$

14. a) $f(x) = 2x - 1$

x	0	1
$f(x)$	-1	1

$\Rightarrow A(0, -1); B(1, 1) \in Gf$

Fig. 1



b) $\left.\begin{aligned} &C(|a|; 2a+1) \in f \Rightarrow f(|a|) = 2a+1 \\ &\text{Dar } f(|a|) = 2|a| - 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2|a| - 1 = 2a + 1 \Rightarrow |a| - a = 1$

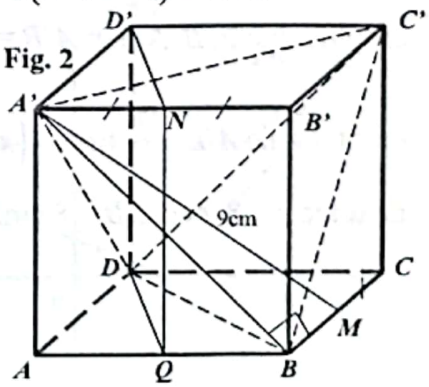
Dar $|a| - a = \begin{cases} 0 \text{ daca } a \ge 0 \\ -2a \text{ daca } a < 0 \end{cases}$ deci $-2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow C\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

c) $f(1) + f(2) + ... + f(2007) = (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + ... + (2 \cdot 2007 - 1) =$

$= 2(1 + 2 + 3 + ... + 2007) - 2007 = 2 \cdot \frac{2007 \cdot 2008}{2} - 2007 = 2007(2008 - 1) = 2007^2$

15. a) Vezi **figura 2.**

Fig. 2



b) $BC \perp (ABB'); A'B \in (ABB') \Rightarrow BC \perp A'B \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta A'BM$ dreptunghic în $B \Rightarrow$ conform **T. Pitagora** avem:

$$A'B^2 + BM^2 = A'M^2 \Rightarrow \left(l\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = 81 \Rightarrow 2l^2 + \frac{l^2}{4} = 81 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 9l^2 = 324 \Rightarrow l^2 = 36 \Rightarrow l = 6$ deci $AB = 6$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

c) Piramida triunghiulară regulată $A'C'BD$ are toate muchiile diagonale în fețele cubului

$\Rightarrow$ toate muchiile au lungimea $l\sqrt{2}=6\sqrt{2}\Rightarrow A_t=4\cdot A_{BDC'}=4\cdot\dfrac{\left(6\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow A_t=72\sqrt{3}$

d) Fie Q mijloc $(AB)\Rightarrow D'N\parallel DQ$. **(fig. 3)**

$$\left.\begin{array}{l}\Delta DAQ\equiv\Delta ABM\Rightarrow \widehat{ADQ}\equiv\widehat{MAB}\\ \mathrm{m}(\widehat{MAD})+\mathrm{m}(\widehat{MAB})=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{m}(\widehat{MAD})+\mathrm{m}(\widehat{ADQ})=90^\circ\Rightarrow DQ\perp AM\Rightarrow D'N\perp AM\\ \text{Dar } AA'\perp(A'B'C');\ D'N\subset(A'B'C')\Rightarrow D'N\perp AA'\end{array}\right\}\Rightarrow D'N\perp(AMA').$$

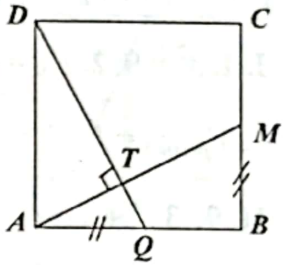


Fig. 3

VARIANTA 44

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$2^2\cdot3^2$	1	3	5	50	20	600	36	C	B	A	C

III. 13. Notăm cu x prețul inițial al produsului și cu y prețul produsului după prima scumpire.

Se obțin ecuațiile: $x+\dfrac{10}{100}x=y$ și $y-\dfrac{10}{100}y=247{,}5$ de unde $y=275$ lei și $x=250$ lei.

b) Avem $250-247{,}5=2{,}5$ lei. $\dfrac{p}{100}$ din $250=2{,}5$ deci $p=\dfrac{2{,}5}{250}\cdot100$ adică $p\%=1\%$.

14. a) Înlocuind $x=14$ și $y=4$ obținem $3\cdot14+2\cdot4=50$ deci $50=50$ „A" rezultă că $(14,4)$ este soluție a ecuației date.

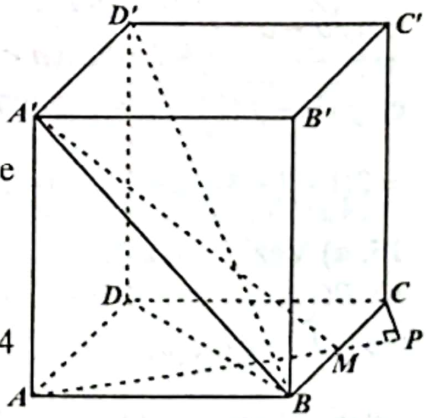
b) Prima ecuație a sistemului se scrie $x^2-4x+4+4y^2+8y+16=x^2-4+y^2$, de unde rezultă că $-4x+8y=-24$. Deci avem de rezolvat sistemul format din ecuațiile $-4x+8y=-24$ și $3x+2y=50$, de unde obținem $x=14$ și $y=4$.

c) Inecuația se scrie $2x-\sqrt{5}\cdot x\le\sqrt{5}-2$ rezultă că $x\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)\le\sqrt{5}-2$, de unde

$x\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)\ge\left(2-\sqrt{5}\right)$ adică $x\ge\dfrac{\left(2-\sqrt{5}\right)}{\sqrt{5}-2}$. Deci $x\in[-1;\infty)$.

Fig. 1

15. a) Vezi **figura 1.**



b) Notăm cu x lungimea muchiei cubului. Deoarece $A'A\perp(ABC)$, $AB\perp BC$ și $AB, BC\subset(ABC)$ rezultă că $A'B\perp BC$ **(teorema celor trei perpendiculare)** deci $A'B\perp BM$, implică triunghiul $A'BM$ este dreptunghic în B. Avem $A'B=x\sqrt{2}$ și $BM=\dfrac{x}{2}$. Din triunghiul dreptunghic $A'BM$ obținem $\left(x\sqrt{2}\right)^2+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=12$ implică $2x^2+\dfrac{x^2}{4}=144$ de unde $x=8$, deci $AB=8$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

c) Proiecția dreptei BD' pe planul (ABC) fiind dreapta BD rezultă că unghiul format de BD' cu (ABC) este unghiul $D'BD$. Cum $BD = l\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ (diagonală în pătratul $ABCD$), în triunghiul dreptunghic $DD'B$ aplicăm $\text{tg}D'BD = \frac{DD'}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) Cum $A'A \perp (ABC)$ și $A'A \subset (A'AM)$ atunci $(A'AM) \perp (ABC)$, deci distanța de la punctul C la planul $(A'AM)$ este egală cu distanța de la C la AM, unde $AM = (A'AM) \cap (ABC)$. Fie CP această distanță, deci $CP \perp AM$, $P \in AM$. Deoarece $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle CMP$ (opuse la vârf) și $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle CPM$ (= 90°) atunci triunghiurile ABM și CPM sunt asemenea (U.U.) de unde $\frac{AB}{CP} = \frac{BM}{PM} = \frac{AM}{CM}$ adică $\frac{8}{CP} = \frac{4}{PM} = \frac{4\sqrt{5}}{4}$. Din triunghiul dreptunghic ABM avem $AM^2 = AB^2 + BM^2$ (**Pitagora**) de unde $AM = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ (cm). Deci $\frac{8}{CP} = \frac{4\sqrt{5}}{4}$ rezultă că $CP = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ cm.

VARIANTA 45

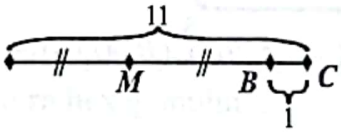
I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
333	13	3	0	$\frac{9}{4}$	22	288	$2\sqrt{3}$	C	D	B	C

I. 1. $765 - 432 = 333$; **2.** 13; **3.** 3; **4.** $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$; **5.** $\frac{9}{4}$; **6.** $P_{\square} = 2(L + l) = 22$ cm;

7. $V_{cilindru} = \pi R^2 6 = 288\pi$ cm^3; **8.** $d = l\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm; **II. 9.** $f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \Rightarrow$ răspuns **C.**

10. $(x-4)(x+4) = x^2 - 16 \Rightarrow$ răspuns **D.**

11. 

$\left.\begin{matrix} AC = 11 \\ BC = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB = 10 \Rightarrow MB = 5 \Rightarrow MC = 6 \Rightarrow$ răspuns **B.**

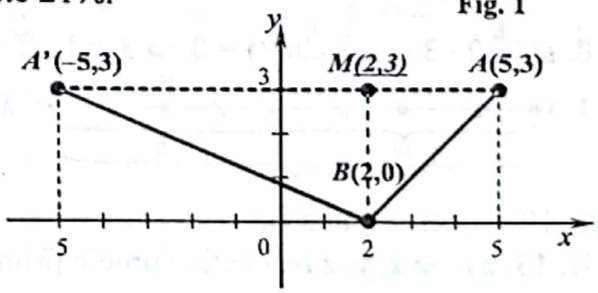
12. $\frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ}{tg45^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ răspuns C.

III. 13. a) Fie x prețul inițial. Avem relația: 110% x + 10% · (110% x) = 13,31 lei $\Rightarrow$
$\Rightarrow x \cdot \frac{110}{100} \cdot \frac{110}{100} = 13{,}31$ lei $\Rightarrow x = \frac{1331}{121} = 11$ lei.

b) Fie procentul cerut p % $\Rightarrow$ 11 lei $\cdot \frac{100+p}{100} = 13{,}31$ lei $\Rightarrow 100 + p = \frac{1331}{11} \Rightarrow$
$\Rightarrow 100 + p = 121 \Rightarrow p = 21 \Rightarrow$ procentul cerut este 21%.

14. a) Vezi **figura 1.**

Fig. 1



b) $A_{\Delta ABA'} = \frac{BM \cdot AA'}{2} = \frac{3 \cdot 10}{2} = 15$

c) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ astfel ca $A(5,3); B(2,0) \in G_f \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow f(5)=3\Rightarrow 5a+b=3$
$f(2)=0\Rightarrow 2a+b=0$ $\Big\}\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$

Deci $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-2$

Dar A, B, C coliniare $\Rightarrow C(m;\ 2m+1)\in G_f \Rightarrow f(m)=2m+1$.

Dar $f(m)=m-2\Rightarrow m-2=2m+1\Rightarrow$

$\Rightarrow m=-3\Rightarrow C(-3,-5)$.

15. a) Vezi **figura 2.**

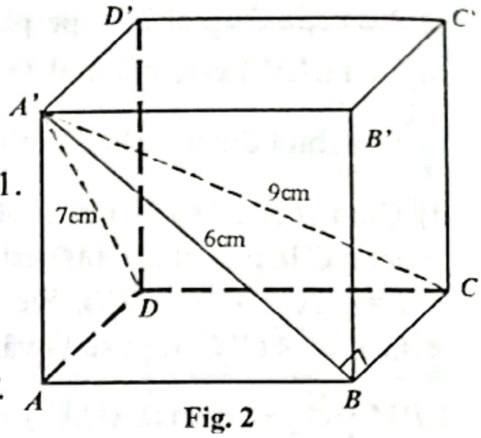


Fig. 2

b) $\left.\begin{matrix} BC\perp AB\,(ABCD \text{ dreptunghi}) \\ BC\perp BB'\,(ABB'A' \text{ dreptunghi}) \end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} BC\perp (ABB') \\ A'B\subset (ABB') \end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp A'B.$

c) $\Delta A'BC$ dreptunghic în $\hat{B} \overset{\text{T.Pitagora}}{\underset{\Delta A'BC}{\Rightarrow}} BC=3\sqrt{5}\Rightarrow$

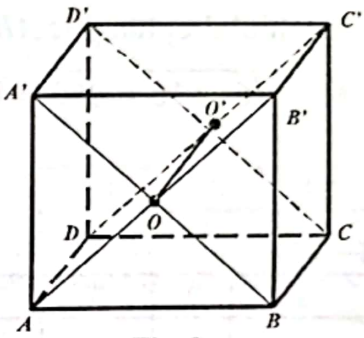


Fig. 3

$\Rightarrow AD=3\sqrt{5} \overset{\text{T.Pitagora}}{\underset{\Delta A'AD}{\Rightarrow}} AA'=2 \overset{\text{T.Pitagora}}{\underset{\Delta A'AB}{\Rightarrow}} AB=4\sqrt{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow V_{paralelipiped}=AB\cdot AD\cdot AA'=3\sqrt{5}\cdot 2\cdot 4\sqrt{2}=24\sqrt{10}\ \text{cm}^3$.

d) $(A'BC)=(A'BCD')$; $(B'AD)=(AB'C'D)$;

Fie $A'B\cap AB'=\{O\}$; $DC'\cap D'C=\{O'\}\Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} (A'BC)\cap(B'AD)=OO'\parallel BC \\ BC\perp A'B \\ BC\perp AB' \end{matrix}\right\}\Rightarrow \sphericalangle((A'BC),(B'AD))=\widehat{A'OA}$. **(fig. 3)**

$\mathcal{A}_{\Delta A'OA}=\dfrac{A'O\cdot AO\cdot\sin(\widehat{A'OA})}{2}=\dfrac{9}{2}\sin\widehat{A'OA}$.

$\mathcal{A}_{\Delta A'OA}=\dfrac{1}{4}\mathcal{A}_{A'ABB'}=\dfrac{1}{4}\cdot 2\cdot 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}\Rightarrow \sin(\widehat{A'OA})=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\Rightarrow \sin(\sphericalangle((A'BC),(B'AD)))=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$.

VARIANTA 46

I+II

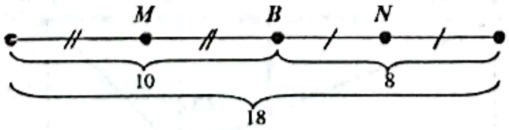
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11	170	9	3	45	18	240	400	C	C	D	B

I. 1. $121:11=11$; **2.** $\overline{17x}:10\Rightarrow x=0\Rightarrow 170$; **3.** $\dfrac{a}{6}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow a=9$; **4.** $2x-1=5\Rightarrow x=3$;

5. $45°$; **6.** $L_{cerc}=2\pi R=18\pi$; **7.** $V=4\text{cm}\cdot 5\text{cm}\cdot 12\text{cm}=240\text{cm}^3$; **8.** $A_{sfera}=4\pi R^2=400\pi\text{cm}^2$;

II. 9. $a=2(3+\sqrt{8})=6+4\sqrt{2}; b=6-4\sqrt{2}\Rightarrow \dfrac{a+b}{2}=6\Rightarrow$ răspuns **C.**

10. $u(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2007)=0\Rightarrow 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2007$ are ultima cifră $3\Rightarrow$ răspuns **C.**

11. 

$MN=MB+BN=\dfrac{AB}{2}+\dfrac{BC}{2}=5+4=9\Rightarrow$ răspuns **D.**

12. $100°$ deci răspuns **B.**

III. 13. a) Fie x, y, z respectiv sumele primite de fiecare frate $\Rightarrow x+y+z=130$.

Scanned with OKEN Scanner

Dar $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{3z}{5}$ deoarece $x-\frac{2}{3}x=\frac{x}{3}; y-\frac{75}{100}y=\frac{25}{100}y=\frac{y}{4}; z-\frac{40}{100}z=\frac{60z}{100}=\frac{3z}{5}$

Din $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{3z}{5}=k\Rightarrow x=3k; y=4k; z=\frac{5k}{3}\Rightarrow 3k+4k+\frac{5k}{3}=130\Rightarrow 26k=390\Rightarrow$

$\Rightarrow k=15\Rightarrow$ cei trei frați au primit 45 lei, 60 lei și, respectiv, 25 lei.

b) Primul a cheltuit $45\,\text{lei}\cdot\frac{2}{3}=30\,\text{lei}$, al doilea a cheltuit $60\,\text{lei}\cdot\frac{75}{100}=45\,\text{lei}$, iar al treilea a cheltuit $25\,\text{lei}\cdot\frac{40}{100}=10\,\text{lei}$.

14. a) $E(x)=(x+1)^2+2(x-7)+1=x^2+4x-12=x^2+4x+4-16=(x+2)^2-4^2=(x-2)(x+6)$.

b) $E(-1)=(-1-2)(-1+6)=-3\cdot 5=-15$.

c) $E(x)+16=(x+1)^2+2x-14+1+16=(x+1)^2+2x+2+1=(x+1)^2+2(x+1)+1=$

$=\left[(x+1)+1\right]^2=(x+2)^2\geq 0$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}$.

15. a) Vezi **figura 1**.

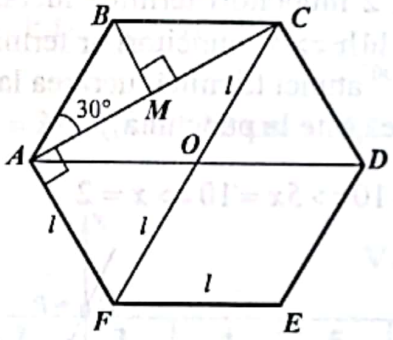


Fig. 1

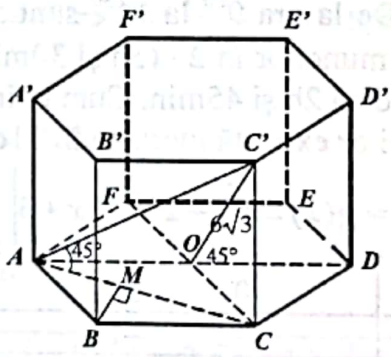


Fig. 2

b) $\Delta ACC'$ dreptunghic cu un unghi de $45°\Rightarrow \Delta ACC'$ = dreptunghic isoscel $\Rightarrow CC'=AC$;
Fie latura hexagonului l.

În ΔACF $AF\perp AC\overset{T.Pitagora}{\Rightarrow} AC=l\sqrt{3}\Rightarrow \left.\begin{matrix}C'C=l\sqrt{3}\\ CO=l\end{matrix}\right\}\Rightarrow l^2+3l^2=108$ (din **T. lui Pitagora** în $\Delta C'CO$) și atunci $4l^2=108\Rightarrow l^2=27\Rightarrow l=3\sqrt{3}\Rightarrow AB=3\sqrt{3}\Rightarrow CC'=l\sqrt{3}=9\,\text{cm}$.

c) $A_{l\,prisma}=P_{bazei}\cdot CC'=6\cdot 3\sqrt{3}\cdot 9=162\sqrt{3}\,\text{cm}^2$; $A_{\,prisma}=A_l+2A_b=A_l+3l^2\sqrt{3}=243\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

d) $\left.\begin{matrix}C'C\perp(ABC); CC'\subset(ACC')\Rightarrow(ACC')\perp(ABC)\\ \text{Fie } BM\perp AC, M\in(AC)\end{matrix}\right\}\Rightarrow BM\perp(ACC')\Rightarrow d\left(B,(ACC')\right)=BM$

Dar ΔABC isoscel $\Rightarrow$ M mijlocul lui $AC\underset{\Delta ABM}{\overset{T.Pitagora}{\Rightarrow}} BM^2=AB^2-\left(\frac{AC}{2}\right)^2=27-\frac{81}{4}=\frac{27}{4}$,

deci $BM=\frac{3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow d\left(B,(ACC')\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 47

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
55	a	40	$\{8;9\}$	4	3	36	600	B	D	B	C

I. 1. $5+10\cdot 5=55$; **2.** $\sqrt{18}>\sqrt{12}\Rightarrow 3\sqrt{2}>2\sqrt{3}\Rightarrow$ răspuns $3\sqrt{2}$.; **3.** $\frac{25}{100}\cdot 160=40$;

4. $A-B=\{8,9\}$; **5.** $532:6=88$ rest 4; **6.** $3\text{dm}^3=3l$; **7.** $V=\frac{4\pi R^3}{3}=36\pi\text{cm}^3$;

8. $A_{cub}=6l^2=600\text{cm}^2$; **II. 9.** $\left(-\frac{x^2}{y^4}\right)\cdot\left(-\frac{y^2}{x^4}\right)=\frac{1}{x^2y^2}\Rightarrow$ răspuns **B.**

10. $3(x-1)=(x-1)(x+1)\Rightarrow 3(x-1)-(x-1)(x+1)=0\Rightarrow (x-1)\left[3-(x+1)\right]=0\Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)(2-x)=0\Rightarrow x_1=1$ sau $x_2=2\Rightarrow$ răspuns corect **D.**

11. Din **T.Pitagora** $\Rightarrow$ ipotenuza este 10cm $\Rightarrow$ înălțimea este $\frac{6\text{cm}\cdot 8\text{cm}}{10\text{cm}}=4,8\text{cm}\Rightarrow$ răspuns **B.**

12. $\sin^2\hat{B}+\cos^2\hat{B}=1\Rightarrow$ răspuns **C.**

III. 13. a) De la ora 9^{00} la 14^{30} sunt 5h şi 30min; 2 muncitori termină lucrarea în 5h şi 30min $\Rightarrow$ 1 muncitor în $2\cdot$ (5h şi 30min), adică în 11h $\Rightarrow$ 4 muncitori ar termina lucrarea în 11h : 4, adică 2h şi 45min. Cum ei încep la ora 8^{00} atunci termină lucrarea la 10^{45}.

b) Un muncitor execută lucrarea în 11ore (rezolvarea este la punctul a)).

14. a) $f(x)=g(x)\Rightarrow \frac{x}{2}-2=-2x+3\Big|_{\cdot 2}\Rightarrow x+4x=10\Rightarrow 5x=10\Rightarrow x=2$

b)

x	0	2
$f(x)$	-2	-1
$g(x)$	3	-1

$f(0)=-2$; $g(0)=3$; $f(2)=-1$; $g(2)=-1\Rightarrow$

$\Rightarrow A(0,-2)\in G_f$; $C(0,3)\in G_g$; $B(2,-1)\in G_f\cap G_g$. **(fig. 1)**

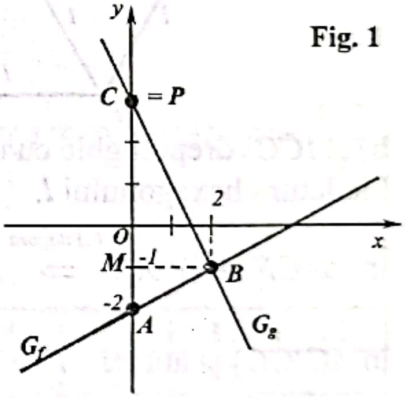


Fig. 1

c) $\left.\begin{array}{l} G_g\cap Oy=\{P(0,m)\}\Rightarrow g(0)=m \\ \text{Dar } g(0)=3 \end{array}\right\}\Rightarrow m=3\Rightarrow P(0,3)=C(0,3).$

$\left.\begin{array}{l} A_{\Delta PAB}=\frac{BM\cdot CA}{2}=\frac{2\cdot 5}{2}=5, \text{unde } M(0,-1). \text{Dar } A_{\Delta PAB}=\frac{d(P,AB)\cdot AB}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow$

In ΔMAB, cf. **T. Pitagora** $AB^2=MB^2+MA^2\Rightarrow AB=\sqrt{5}$

$\Rightarrow \frac{d(P,AB)\cdot\sqrt{5}}{2}=5\Rightarrow d(P,AB)=2\sqrt{5}\Rightarrow d(P,G_f)=2\sqrt{5}$

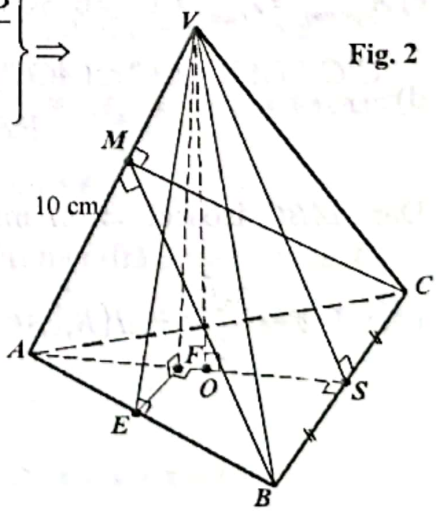


Fig. 2

15. a) Vezi **figura 2.**

b) $R=4\sqrt{3}$ adică $AO=4\sqrt{3}$. Dar în triunghi echilateral avem

$R=\frac{l\sqrt{3}}{3}\Rightarrow 4\sqrt{3}=\frac{l\sqrt{3}}{3}\Big|_{\cdot\sqrt{3}}\Rightarrow \frac{l}{3}=4\Rightarrow l=12\Rightarrow AB=12\text{ cm}$

c) Fie $EF\parallel BC$, $F\in(AO)$. Dar E mijloc $(AB)\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow F$ este mijloc (AS), S mijloc (BC).

$$\left.\begin{array}{l} AS \perp BC \\ EF \parallel BC \end{array}\right\} \Rightarrow AS \perp EF \Rightarrow OF \perp EF, OF, EF \subset (ABC) \left.\begin{array}{l} \\ VO \perp (ABC) \end{array}\right\} \overset{T.3\ perpendiculare}{\Rightarrow} VF \perp EF \text{ adică}$$

ΔVEF dreptunghic în F. Dar $\sphericalangle(VE,BC) = \sphericalangle(VE,EF) = \sphericalangle(VEF)$. Deci avem de calculat $\sin(V\hat{E}F)$. EF linie mijlocie $\Delta ABS \Rightarrow EF = \frac{BS}{2} = \frac{BC}{4} = 3$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta VAE \overset{cf.\ T.Pitagora}{\Rightarrow} VE^2 = VA^2 - AE^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow VE = 8cm \\ \Delta VEF \overset{cf.\ T.Pitagora}{\Rightarrow} VF^2 = VE^2 - EF^2 = 64 - 9 = 55 \Rightarrow VF = \sqrt{55}cm \end{array}\right\} \Rightarrow \sin(\sphericalangle VEF) = \frac{VF}{VE} = \frac{\sqrt{55}}{8},$$

de unde $\sin(VE, BC) = \frac{\sqrt{55}}{8}$.

d) $\mathcal{P}_{\Delta MBC}$ = minim dacă $MB + MC$ minim, dar $(MB) \equiv (MC)$ din $\Delta BMA \equiv \Delta CMA \Rightarrow$

$\Rightarrow MB + MC$ = minim $\Rightarrow 2MB$ = minim $\Rightarrow MB$ = minim $\Rightarrow MB \perp VA$

Dar $\left.\begin{array}{l} \mathcal{A}_{\Delta VAB} = \frac{VE \cdot AB}{2} = \frac{8 \cdot 12}{2} = 48 \text{ cm}^2 \\ \mathcal{A}_{\Delta VAB} = \frac{VA \cdot BM}{2} = \frac{10 \cdot BM}{2} = 5 \cdot BM \end{array}\right\} \Rightarrow 5BM = 48 \Rightarrow BM = \frac{48}{5} \text{ cm} = 9{,}6 \text{ cm}.$

Deci $\mathcal{P}_{\Delta MBC} = 2 \cdot 9{,}6 \text{ cm} + 12 \text{ cm} = 19{,}2 \text{ cm} + 12 \text{ cm} = 31{,}2 \text{ cm}$.

VARIANTA 48

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
9	1,62	$\frac{1}{3}$	$\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	24	90	288	D	B	A	A

I. 1. $3 + 2 \cdot 3 = 9$; **2.** $3{,}24 : 2 = 1{,}62$; **3.** $n \in \mathbb{N}^*$, $n < 10 \Rightarrow n \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\} \rightarrow 9$ elemente

$n \vdots 3 \Rightarrow n \in \{3, 6, 9\} \rightarrow 3$ elemente $\Rightarrow P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; **4.** $\sqrt{18} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$;

5. $d = l\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$; **6.** $\mathcal{A}_{romb} = \frac{d_1 \cdot d_1}{2} = 24cm^2$; **7.** $\mathcal{A}_{l\ prisma} = \mathcal{P}_B \cdot h = 3 \cdot 6 \cdot 5 = 90\text{cm}^2$;

8. $\mathcal{V}_{cilindru} = \pi R^2 \cdot 6 = 288\pi \text{ cm}^3$; **II. 9.** $a = -0{,}75; b = -\frac{5}{6} = -0{,}8(3); c = -\frac{7}{8} = -0{,}875$;

Dar $-0{,}875 < -0{,}8(3) < -0{,}75 \Rightarrow c < b < a \Rightarrow a > b > c \Rightarrow a \geq b \geq c \Rightarrow$ răspuns **D.**

10. $f\left(\sqrt{3}-1\right) = 2\left(\sqrt{3}-1\right) - 2\left(\sqrt{3}-1\right) = 0 \Rightarrow$ răspuns **B.**

11. $5^2 + 12^2 = 169 = 13^2 \overset{R.T.Pitagora}{\Rightarrow}$ triunghiul este dreptunghic cu catetele 5 şi 12 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{A} = \frac{60}{2} = 30cm^2 \Rightarrow$ răspuns **A.**

Scanned with OKEN Scanner

12. ΔABC dreptunghic în A $\overset{R.T.Pitagora}{\Longrightarrow}$ obținem $AC = 8$cm deci

$\sin\hat{B} + tg\hat{B} = \frac{AC}{BC} + \frac{AC}{AB} = \frac{8}{10} + \frac{8}{6} = \frac{4}{5} + \frac{4}{3} = \frac{32}{15} \Rightarrow$ răspuns **A.**

III. 13. a) Fie $\left.\begin{array}{l} x = \text{cantitatea de grâu din primul depozit} \\ y = \text{cantitatea de grâu din al doilea depozit} \\ z = \text{cantitatea de grâu din al treilea depozit} \end{array}\right\} \Rightarrow x + y + z = 600\text{ t} \Rightarrow$

$x - 45t = y + 20t = z + 25t \Rightarrow y = z + 5 \Rightarrow$ al doilea depozit conține cu 5t mai mult decât al treilea.

b) Cum $y = x - 65t$ şi $z = x - 70t$, înlocuind în sumă rezultă $3x - 135t = 600t$, de unde obținem $245t$ grâu în primul depozit, $180t$ grâu în al doilea depozit şi $175t$ în al treilea.

Metoda a II-a:

După transferul a $20t + 25t = 45t$ din primul depozit în celelalte două, cantitățile de grâu din cele trei depozite devin egale, fiind de $600t : 3 = 200t$. Deci, la început, în primul depozit erau $200t + 45t = 245t$, în al doilea, $200t - 20t = 180t$ şi în al treilea depozit, $200t - 25t = 175t$.

14. a) $E(x) = \left(\frac{x+2/}{x-2}\frac{2}{} + \frac{x-2/}{x+2}\frac{x}{}\right) : \frac{x^2+4}{x^2-x-2} = \frac{2(x+2)+x(x-2)}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x^2-2x+x-2}{x^2+4} =$

$= \frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x-2)(x+1)}{x^2+4} = \frac{x+1}{x+2} \Rightarrow E(x) = \frac{x+1}{x+2}, x \in \mathbb{R}\setminus\{-2;-1;2\}.$

b) $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(a) \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\frac{a+1}{a+2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a+2) \mid (a+1)$

$\left.\begin{array}{l} (a+2) \mid (a+1) \\ \text{Dar } (a+2) \mid (a+2) \end{array}\right\} \Rightarrow (a+2) \mid [(a+1)-(a+2)] \Rightarrow (a+2) \mid (-1) \Rightarrow a+2 \in \{\pm 1\}$ de unde

$a \in \{-3;-1\}$.

c) $2E(x) + E(0) = 3 \Rightarrow \frac{2(x+1)}{x+2} + \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow \frac{2(x+1)}{x+2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 4x + 4 = 5x + 10 \Leftrightarrow x = -6.$

15. a) Vezi **figura 1.**

Fig. 1

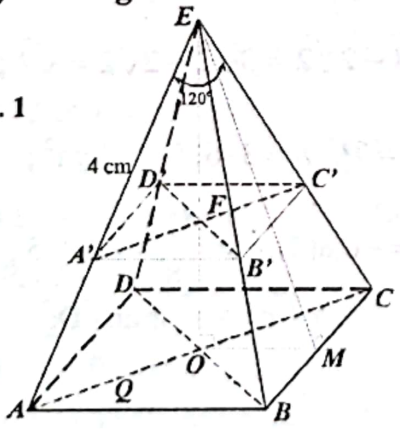
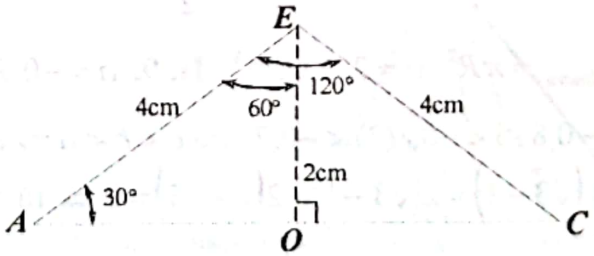


Fig. 2



b) Din figura în spațiu (**fig. 1**) considerăm ΔAEC în care vom face tot raționamentul. (**fig. 2**)

$\left.\begin{array}{l} \Delta AEC \text{ isoscel} \\ m(\sphericalangle AEC) = 120^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow m(\sphericalangle EAC) = m(\sphericalangle ECA) = 30^\circ$. Cum punctul O este mijlocul lui

Scanned with OKEN Scanner

$[AC]$, EO înălțime. În ΔAEO, $\sin\hat{A}=\frac{EO}{AE}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{EO}{4}\Rightarrow EO=2\text{cm}$.

c) Pentru calcularea A_t avem nevoie de EM (apotema piramidei) și AB (latura bazei) deoarece $A_t=\frac{a_p\cdot P_b}{2}+A_B$ adică $A_t=2a_p\cdot l+l^2$.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta AEO,\text{m}(\hat{O})=90^\circ\\ \text{În } AE=4\text{cm}\\ EO=2\text{cm}\end{array}\right\}\overset{T.Pitagora}{\Rightarrow}\left.\begin{array}{l}AO=2\sqrt{3}\Rightarrow AC=4\sqrt{3}\\ \text{Dar } AC=l\sqrt{2}\end{array}\right\}\Rightarrow l=2\sqrt{6}\Rightarrow OM=\sqrt{6}\Rightarrow AB=2\sqrt{6}\,\text{cm}.$$

$$\text{În } \Delta EOM\overset{T.Pitagora}{\Rightarrow}EM=\sqrt{10}\Rightarrow\mathcal{A}_t=2\cdot\sqrt{10}\cdot2\sqrt{6}+\left(2\sqrt{6}\right)^2\Rightarrow\mathcal{A}_t=8\sqrt{15}+24=8\left(\sqrt{15}+3\right)\text{cm}^2.$$

$$\textbf{d)}\left.\begin{array}{l}\mathcal{V}_{EABCD}=\frac{\mathcal{A}_{ABCD}\cdot EO}{3}=\frac{24\cdot2}{3}=16\text{cm}^3\\ \mathcal{V}_{EA'B'C'D'}=2\text{cm}^3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{\mathcal{V}_{EA'B'C'D'}}{\mathcal{V}_{EABCD}}=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3\\ \text{Dar }\frac{\mathcal{V}_{EA'B'C'D'}}{\mathcal{V}_{EABCD}}=\left(\frac{EF}{EO}\right)^3\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\frac{EF}{EO}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{EF}{EO}=\frac{1}{2}\Rightarrow EF=1\text{cm}\ (F\text{ mijlocul lui }EO).$$

VARIANTA 49

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
63	24	$\frac{5}{6}$	1, 6	5	16	36	150	**D**	**C**	**A**	**B**

I. 1. 63; **2.** 24 ore; **3.** $\frac{5}{6}$; **4.** 16; **5.** 6cm; **6.** P = 16cm; **7.** $V=\frac{4\pi R^3}{3}=36\pi\,\text{cm}^2$;

8. $A_t=6l^2=150\,\text{cm}^2$; **II. 9.** $\frac{x-1}{4}=\frac{3}{2}\Rightarrow x-1=6\Rightarrow x=7\Rightarrow$ răspuns **D.**

10. $A(m,m+11)\in G_f\Leftrightarrow f(m)=m+11\Leftrightarrow3m-1=m+11\Leftrightarrow m=6\Rightarrow$ răspuns **C.**

11. $BD=10cm;CD=40cm\Rightarrow BC=50cm$, iar din *T. înălțimii* $AD^2=BD\cdot CD\Rightarrow$

$\Rightarrow AD^2=400cm^2\Rightarrow AD=20cm\Rightarrow A_{\Delta ABC}=\frac{AD\cdot BC}{2}=500cm^2\Rightarrow$ răspuns **A.**

12. $A_{ABCD}=d\left(D,AB\right)\cdot AB\Rightarrow56cm^2=d\left(D,AB\right)\cdot7cm\Rightarrow d\left(D,AB\right)=8cm\Rightarrow$ răspuns **B.**

III. 13. a) $A=\underbrace{3^0+3^1+3^2+...+3^{2007}}_{2008\,termeni}$; $3^0;3^1;3^2;...;3^{2007}$ sunt numere impare.

Deci A este suma unui număr par de numere impare $\Rightarrow A=$ par.

b) $\left.\begin{array}{l}A\text{ are 2008 termeni}\\ 2008:2\text{deci ii putem grupa cate 2}\end{array}\right\}\Rightarrow A=\left(3^0+3^2\right)+\left(3^1+3^3\right)+\left(3^4+3^6\right)+...+\left(3^{2005}+3^{2007}\right)=$

$=10+3\cdot10+3^4\cdot10+...+3^{2005}\cdot10=10\left(1+3+3^4+3^5+3^8+...+3^{2005}\right):10$

Scanned with OKEN Scanner

Metoda a II-a

$A=3^0+3^1+3^2+\ldots+3^{2007}\in\mathbb{N}\Big|_{\cdot 3}\Rightarrow 3A=\underbrace{3^1+3^2+3^3+\ldots+3^{2007}}_{A-1}+3^{2008}\Rightarrow$

$\Rightarrow 3A=A-1+3^{2008}\Rightarrow A=\dfrac{3^{2008}-1}{2}\in\mathbb{N}.$

Dar $u(3^{2008})=1\Rightarrow u\left(3^{2008}-1\right)=0\Rightarrow \left.\begin{array}{l} u\left(\dfrac{3^{2008}-1}{2}\right)\in\{0,5\}\Rightarrow A\vdots 5 \\ Dar\ A\ par\Rightarrow A\vdots 2\end{array}\right\}\Rightarrow A\vdots 10.$

14.a) $E(x)=\left(\dfrac{5}{x-2}+\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{6}{(x-2)(x+2)}\right):\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}+1\right)=\dfrac{5(x+2)+2(x-2)-6}{(x-2)(x+2)}:\dfrac{x^2+4+x^2-4}{(x-2)(x+2)}=$

$=\dfrac{7x}{(x-2)(x+2)}\cdot\dfrac{(x-2)(x+2)}{2x^2}=\dfrac{7}{2x}\Rightarrow E(x)=\dfrac{7}{2x}.$

b) $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}-\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{4}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow E\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{7}{2\cdot\frac{1}{2}}=7.$

c) $E(a)=\dfrac{1}{2}a+3, dar\ E(a)=\dfrac{7}{2a}\Leftrightarrow \overset{a/}{\dfrac{a}{2}}+\overset{2a/}{3}=\dfrac{7}{2a}\Big|_{\cdot 2a\neq 0}\Leftrightarrow a^2+6a=7\Leftrightarrow a^2+6a-7=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-1)(a+7)=0\Leftrightarrow a\in\{1,-7\}.$

15. a) Vezi **figura 1.**

Fig. 1

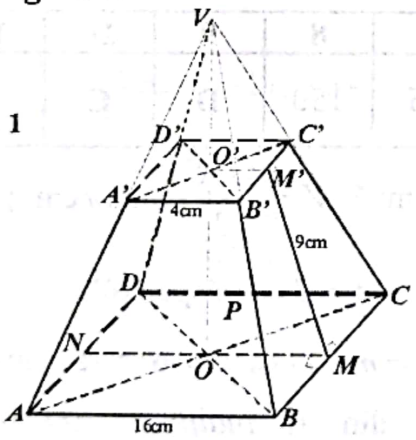
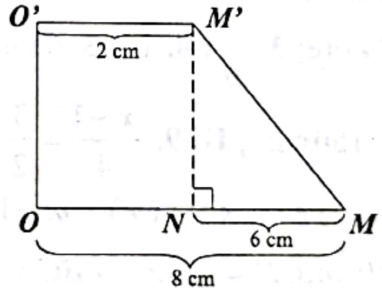


Fig. 2



b) Din figura realizată (**fig. 1**) considerăm trapezul dreptunghic $OMM'O'$ (**fig. 2**) în care vom realiza următorul raționament. OM apotema pătratului $ABCD\Rightarrow OM=\dfrac{16}{2}\text{cm}=8\text{cm}$

Analog $O'M'=2\text{cm}$. Construim $M'N\perp OM$, $N\in(OM)$.

$MN=OM-ON=OM-O'M'=8\text{cm}-2\text{cm}=6\text{cm}$

În $\Delta M'NM\overset{T.Pitagora}{\Rightarrow} M'N^2=45\text{cm}^2\Rightarrow M'N=3\sqrt{5}\text{cm}\Rightarrow OO'=3\sqrt{5}\text{cm}\Rightarrow h=3\sqrt{5}\text{cm}.$

c) $O'M'\|OM\overset{t.f.a.}{\Rightarrow}\Delta VO'M'\sim\Delta VOM\Rightarrow\dfrac{VO'}{VO}=\dfrac{O'M'}{OM}\Rightarrow\dfrac{VO'}{VO'+OO'}=\dfrac{O'M'}{OM}\Rightarrow\dfrac{VO'}{VO'+OO'}=\dfrac{2}{8}\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow 4VO' = VO' + 3\sqrt{5} \Rightarrow VO' = \sqrt{5} \Rightarrow VO = 4\sqrt{5} \Rightarrow V_{VABCD} = \dfrac{VO \cdot A_{ABCD}}{3} = \dfrac{4\sqrt{5}\text{cm} \cdot 256\text{cm}^2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{VABCD} = \dfrac{1024\sqrt{5}}{3}\text{cm}^3$.

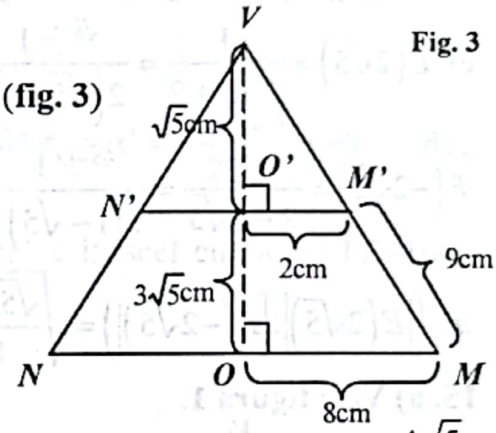
d) Feţele laterale opuse $(AA'D'D)$ şi $(BB'C'C)$ sunt feţele laterale opuse (VAD) şi (VBC) din piramida din care provine trunchiul. Deci calculăm $\sin \sphericalangle((VAD);(VBC))$.

$$\left.\begin{array}{l} V \in (VAD) \cap (VBC) \\ \text{Fie } (VAD) \cap (VBC) = d \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} V \in d, (VAB) \cap (VAD) = d \\ AD \parallel BC \subset (VBC) \Rightarrow AD \parallel (VBC) \end{array}\right\}' \Rightarrow d \parallel AD; d \parallel BC$$

Considerăm apotemele piramidei din care provine trunchiul, construite în (VAD) şi (VBC). Atunci unghiul plan al diedrului $((VAD),(VBC))$ este unghiul format de cele două apoteme, adică $\sphericalangle NVM$. Deci calculăm $\sin(\widehat{NVM})$.

Considerăm din figura realizată secţiunea axială ΔNVM **(fig. 3)**

Fig. 3



În $\Delta VOM \overset{T.Pitagora}{\Rightarrow} VM = \sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2 + 64} \Rightarrow VM = 12\text{cm}$.

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A}_{\Delta VMN} = \dfrac{VO \cdot MN}{2} = \dfrac{4\sqrt{5} \cdot 16}{2} = 32\sqrt{5}\text{cm}^2 \\ \text{Dar } \mathcal{A}_{\Delta VMN} = \dfrac{VM \cdot VN \cdot \sin(\widehat{NVM})}{2} = 72\sin(\widehat{NVM}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sin(\widehat{NVM}) = \dfrac{32\sqrt{5}}{72} = \dfrac{4\sqrt{5}}{9} \Rightarrow \sin(\sphericalangle((AA'D');(BB'C'))) = \sin(\sphericalangle((ABB');(DCC'))) = \dfrac{4\sqrt{5}}{9}$.

VARIANTA 50

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
18	18:00	200	16	28	2	294	27	D	D	A	C

I. 1. $360 : 20 = 18$; **2.** 18:00; **3.** $250 \cdot \dfrac{80}{100} = 200$ oi albe; **4.** 16; **5.** $P = 4 \cdot 7\text{ cm} = 28\text{ cm}$;

6. $\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2\text{cm}$; **7.** $A_l = 6 \cdot l^2 = 6 \cdot 49\text{cm}^2 = 294\text{cm}^2$; **8.** $V_{cub} = l^3 = 27\text{m}^3$;

II. 9. $A = \{11, 12, 13, \ldots, 30\} \Rightarrow card(A) = 20 \Rightarrow$ răspuns **D.**

10. $x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow x \in \{-2, 5\} \Rightarrow$ răspuns **D.**

11. $AM = 3MB \Rightarrow AB = 4MB \Rightarrow MB = 3cm \Rightarrow AM = 9cm \Rightarrow$ răspuns **A.**

12. $\dfrac{3}{\cos 30^\circ} = \dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow$ răspuns **C.**

III. 13. a) Fie x = nr. de pagini citite în prima zi. În următoarele patru zile, elevul a citit $x+5$; $x+10$; $x+15$, respectiv $x+20$ pagini.

Avem ecuaţia: $x + (x+5) + (x+10) + (x+15) + (x+20) = 375 \Leftrightarrow 5x + 50 = 375 \Leftrightarrow x = 65$ pagini, deci trebuie să citească 65 pagini în prima zi.

Scanned with OKEN Scanner

b) Fie y = nr de pagini citite în prima zi, iar în zilele următoare $2y$; $4y$, respectiv, $8y$.
Rezultă $15y = 375 \Leftrightarrow y = 25$ pagini.
Deci ar trebui să citească 25 pagini în prima zi, 50 pagini în a II-a zi, 100 pagini în a III-a zi şi 200 pagini în a IV-a zi.

14. a) $\left.\begin{array}{l}(x+3)(x-2)=x^2+3x-2x-6=x^2+x-6\\ x(1+x)-6=x+x^2-6=x^2+x-6\end{array}\right\} \Rightarrow (x+3)(x-2)=x(1+x)-6, \forall \in \mathbb{R}$.

b) $E(x)=\left(\frac{x-2\,/\,1}{x+2}+\frac{x+1}{(x-2)(x+2)}-\frac{x+2\,/\,1}{x-2}\right):\frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-2)}=\frac{x-2+x+1-x-2}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{x-2}{x-3}=$

$=\frac{x-3}{x+2}\cdot\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x+2}\Rightarrow E(x)=\frac{1}{x+2}$.

c) $E\left(2\sqrt{5}\right)=\frac{1}{2\sqrt{5}+2}=\frac{\sqrt{5}-1\,/\,1}{2\left(\sqrt{5}+1\right)}=\frac{\sqrt{5}-1}{2\cdot 4}=\frac{\sqrt{5}-1}{8}\Rightarrow\left|E\left(2\sqrt{5}\right)\right|=\frac{\sqrt{5}-1}{8}$.

$E\left(-2\sqrt{5}\right)=\frac{1}{2-2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1\,/\,1}{2\left(1-\sqrt{5}\right)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2\cdot(-4)}=\frac{1+\sqrt{5}}{-8}\Rightarrow\left|E\left(-2\sqrt{5}\right)\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{8}$.

$m_g\left(\left|E\left(2\sqrt{5}\right)\right|;\left|E\left(-2\sqrt{5}\right)\right|\right)=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{8}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{8}}=\sqrt{\frac{4}{8}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15. a) Vezi **figura 1**.

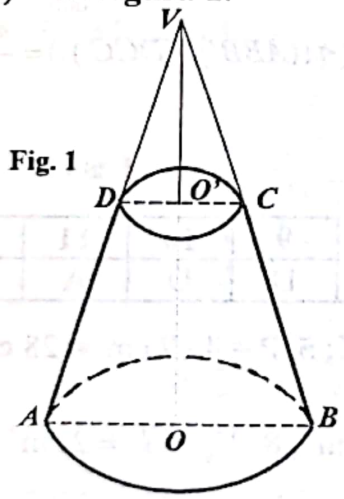


Fig. 1

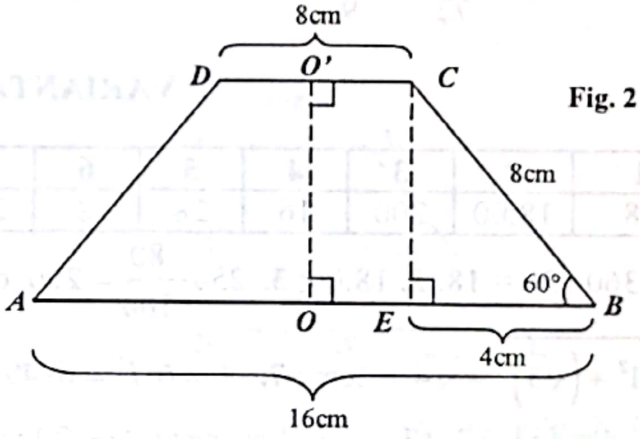


Fig. 2

b) Construim secţiunea axială a trunchiului de con (**fig. 2**).

Construim $CE \perp AB$, $E \in (AB)$. $EB = OB - OE = OB - O'C = \frac{AB}{2} - \frac{CD}{2} = 8\text{cm} - 4\text{cm} \Rightarrow EB = 4\text{cm}$.

În $\Delta ECB, \cos(\hat{B}) = \frac{EB}{CB} \Rightarrow \cos 60° = \frac{4}{CB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{CB}$, de unde rezultă $CB = 8$ cm.

$A_{ltr.con} = \pi g(R+r) = \pi \cdot BC\left(\frac{AB}{2}+\frac{CD}{2}\right) = 96\pi\,\text{cm}^2$.

c) În $\Delta CEB, \sin(\hat{B}) = \frac{EC}{CB} \Rightarrow \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{EC}{8} \Rightarrow EC = 4\sqrt{3} \Rightarrow OO' = 4\sqrt{3} = h$.

Scanned with OKEN Scanner

$\mathcal{V}_{trunchi} = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right) = \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}(64 + 16 + 32) = \frac{4\sqrt{3}\cdot 112\pi}{3} = \frac{448\sqrt{3}\pi}{3}\ \text{cm}^3.$

d) Desfăşurăm suprafaţa laterală a trunchiului de con. (**fig. 3**). Drumul cel mai scurt de la A la B este în linie dreaptă pe desfăşurarea laterală. Calculăm generatoarea conului din care provine trunchiul de con, adică VB.

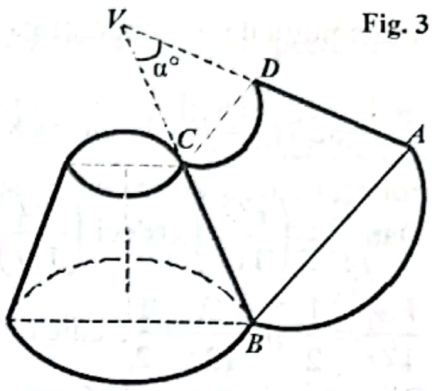


Fig. 3

Se observă că $[DC]$ linie mijlocie în ΔVAB deoarece $DC \parallel AB$ şi $DC = \frac{AB}{2} \Rightarrow VB = 2BC = 16\text{cm}$.

Calcularea lungimii segmentului $[VB]$ se putea face şi observând că ΔVAB este echilateral.

Notăm măsura unghiului la centru pentru sectorul de cerc ce reprezintă desfăşurarea cu α°.

$$\left.\begin{aligned} A_{l\,con} &= \pi RG = \pi \cdot OB \cdot VB = 64\pi\ \text{cm}^2 \\ A_{l\,con} &= A_{sect\,AB} = \frac{\pi \cdot VB^2 \cdot \alpha^\circ}{360} = \frac{256\pi \cdot \alpha^\circ}{360} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{256\pi \cdot \alpha^\circ}{360} = 64\pi \Rightarrow \alpha^\circ = \frac{360 \cdot 64}{256} = 90^\circ$$ deci

ΔVAB din desfăşurarea trunchiului de con este dreptunghic isoscel cu cateta VB=16cm $\Rightarrow AB = 16\sqrt{2}\ \text{cm} \Rightarrow$ Drumul minim are $16\sqrt{2}\ \text{cm}$.

VARIANTA 51

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	756	10	0	5	$5\sqrt{3}$	60	5	C	B	C	D

III. 13. a) Fie x numărul copiilor. Numărul merelor primite este egal cu $5 \cdot (x - 1) + 3$ sau $4x + 11$. Se obţine ecuaţia $5(x - 1) + 3 = 4x + 11$, care are soluţia 13. Deci în grup sunt 13 copii.

b) Numărul merelor primite este egal cu $13 \cdot 4 + 11 = 63$.

14. a) Vezi **figura 1.**

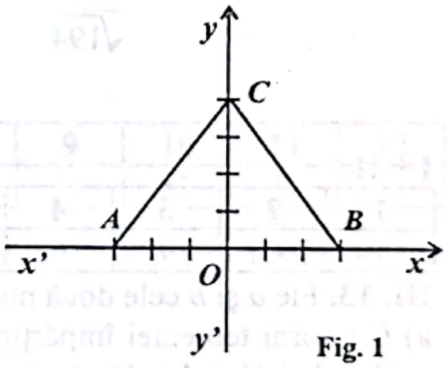


Fig. 1

b) Triunghiul ABC este isoscel pentru că CO este înălţime şi mediană, deci $(AC) \equiv (BC)$. Aplicând teorema lui **Pitagora** în ΔBOC avem: $BC^2 = OB^2 + OC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, de unde $BC = 5$ (u.l.). $\mathcal{P}_{ABC} = 6 + 2 \cdot 5 = 16$ (u.l.)

c) $A \in G_f$ implică $f(-3) = 0$, adică $-3a + b = 0$. $C \in G_f$ implică $f(0) = 4$, adică $b = 4$.

Din $-3a + b = 0$ şi $b = 4$ se obţine $a = \frac{4}{3}$. Deci $f(x) = \frac{4}{3}x + 4$.

15. a) Vezi **figura 2.**

b) Aplicând formula $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3}$ se obţine $\mathcal{V} = \frac{100 \cdot 12}{3} = 400\ \text{cm}^3$.

c) Fie V_1 volumul piramidei mici $VA'B'C'D'$ şi V

Scanned with OKEN Scanner

volumul piramidei mari $VABCD$ din care provine trunchiul de piramidă, deci V-V_1 reprezintă volumul trunchiului de piramidă. (**fig. 2**) Avem $\frac{V_1}{V-V_1}=\frac{1}{7}$, de unde $7V_1 = V - V_1$, adică $8V_1 = V$ şi $\frac{V_1}{V}=\frac{1}{8}$.

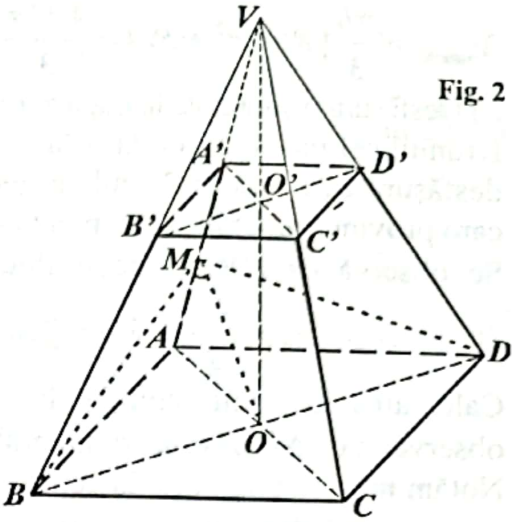


Fig. 2

Dar $\frac{V_1}{V}=\left(\frac{VO_1}{VO}\right)^3$, deci $\left(\frac{VO_1}{VO}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3$, de unde $\frac{VO_1}{VO}=\frac{1}{2}$ şi $\frac{VO_1}{12}=\frac{1}{2}$, adică $VO_1 = 6$ cm.

Distanţa cerută este de 6 cm.

d) Avem $(VAC) \cap (VAB) = AV$. Fie $OM \perp AV$ $(M \in AV)$. Deoarece $BD \perp AC$ (diagonale în pătrat) şi $BD \perp OV$ $(VO \perp (ABC))$, cum $VO \cap AC = \{O\}$ rezultă că $BD \perp (VAC)$, de unde $VA \perp BD$. Din $VA \perp BD$, $AV \perp OM$, cum $OM \cap BD = \{M\}$, rezultă că $VA \perp (MBD)$, de unde $VA \perp MB$ pentru că $MB \subset (MBD)$. Din $MB \perp AV$, $OM \perp AV$, $MB \subset (VAB)$, $OM \subset (VAC)$ şi $(VAB) \cap (VAC) = VA$ rezultă că unghiul plan corespunzător diedrului format de planele (VAB) şi (VAC) este unghiul $\sphericalangle OMB$.

În triunghiul dreptunghic VAO cu teorema lui **Pitagora** se obţine $VA^2 = VO^2 + AO^2 =$ $= 12^2 + \left(\frac{10\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 144 + 50 = 194$, de unde $VA = \sqrt{194}$ cm. Cu **teorema a doua a înălţimii** în ΔVAO dreptunghic se obţine $MO = \frac{OA \cdot OV}{AV} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 12}{\sqrt{194}} = \frac{60\sqrt{2}}{\sqrt{194}}$ cm. Din $BD \perp (VAC)$ şi $OM \subset (VAC)$ rezultă că $OM \perp OB$, deci ΔBOM este dreptunghic şi avem:

$$\operatorname{tg}(\sphericalangle OMB) = \frac{OB}{OM} = \frac{5\sqrt{2}}{\frac{60\sqrt{2}}{\sqrt{194}}} = \frac{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{194}}{60\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{194}}{12}.$$

VARIANTA 52

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,6	7	6	5	9	12	972	C	D	B	C

III. 13. Fie a şi b cele două numere, $a > b$ şi $a + b = 48$.

a) Conform teoremei împărţirii cu rest $a = 3b + 4$, iar $a + b =$ $= 4b + 4$ şi $4b + 4 = 48$, de unde $b = 11$ şi $a = 37$.

b) Dacă $(a; b) = 6$ atunci $a = 6a_1$ şi $b = 6b_1$, cu $(a_1, b_1) = 1$, $(a_1, b_1) \in \mathbb{N}^*$. Înlocuind, avem $6(a_1 + b_1) = 48$ iar $a_1 + b_1 = 8$ cu soluţiile $(a_1, b_1) \in \{(1, 7); (3, 5); (5, 3); (7, 1)\}$ şi $(a, b) \in \{(30, 18); (42, 6)\}$, deoarece $a > b$. Numerele sunt 30 şi 18 sau 42 şi 6.

14. a) Punctele $P(-1, 0)$ şi $Q(0, 1)$ aparţin graficului funcţiei. (**fig. 1**)

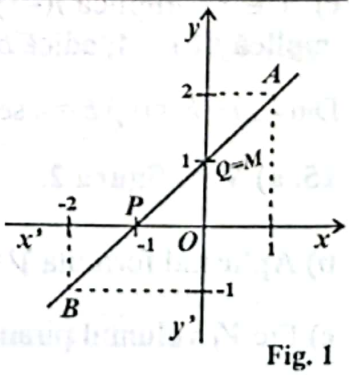


Fig. 1

b) Suma $f(0) + f(1) + ... + f(2005) = (0 + 1) + (1 + 1) + ... + (2005 + 1) =$

Scanned with OKEN Scanner

$= (1 + 2 + ... + 2005) + 2006 = \frac{2005 \cdot 2006}{2} + 2006 = \frac{2006(2005+2)}{2}$ iar

$N = 2007 + 2 \cdot \frac{2006(2005+2)}{2} = 2007 + 2006 \cdot 2007 = 2007^2$, deci este pătrat perfect.

c) Suma $MA + MB$ este minimă când punctele B, M, A sunt coliniare, în această ordine. Punctele A şi B fiind situate pe graficul funcţiei f ($f(1) = 2$ şi $f(-2) = -1$) atunci dreapta AB este graficul lui f şi punctul M este intersecţia graficului cu axa ordonatelor. Deci $M(0, f(0))$, adică $M(0, 1)$.

15. a) Vezi **figura 2.**

b) Fie $B'M \perp AB, M \in (AB)$ şi $AB' \cap A'B = \{Q\}$ **(fig. 2).**

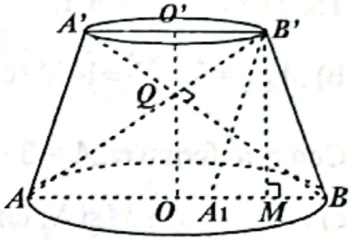


Fig. 2

Avem $OM = O'B' = \frac{A'B'}{2} = \frac{6}{2} = 3$ cm; $OB = \frac{AB}{2} = \frac{18}{2} = 9$ cm şi

$MB = \frac{AB - A'B'}{2} = \frac{18-6}{2} = 6$ cm, iar $AM = AB - MB = 12$ cm.

Triunghiurile $\Delta O'QB'$ şi ΔBOQ sunt dreptunghice isoscele, de unde $QB' = O'B'\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ cm; $AQ = OB\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ cm şi $AB' = 12\sqrt{2}$ cm. Din triunghiul dreptunghic AMB' cu teorema lui **Pitagora** se obţine: $MB'^2 = AB'^2 - AM^2 = \left(12\sqrt{2}\right)^2 - 12^2 = 288 - 144 = 144$, iar din triunghiul dreptunghic MBB': $BB'^2 = MB^2 + MB'^2 = 144 + 36 = 180$, de unde $BB' = 6\sqrt{5}$ cm.

c) $\mathcal{A}_{BQB'} = \frac{QB' \cdot QB}{2} = \frac{OB\sqrt{2} \cdot O'B'\sqrt{2}}{2} = 9 \cdot 3 = 27$ cm^2.

d) Fie $B'A_1 \parallel AA'$ ($A_1 \in AB$). Unghiul format de dreptele AA' şi BB' este unghiul $\sphericalangle BB'A_1$. Exprimând aria triunghiului A_1BB' în două moduri avem: $\mathcal{A}_{A_1BB'} = \frac{B'M \cdot A_1B}{2} =$

$= \frac{B'A_1 \cdot BB' \cdot \sin(\sphericalangle BB'A_1)}{2}$, de unde $\sin(\sphericalangle BB'A_1) = \frac{12 \cdot 12}{6\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5}} = \frac{144}{180} = \frac{4}{5}$.

VARIANTA 53

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	14	a	10	2000	100	3	75	D	C	B	B

III. 13. Conform ipotezei $x = \frac{60}{100} \cdot y$ de unde $100x = 60y$ iar $5x = 3y$. **a)** Ultima relaţie conduce la $\frac{x}{\frac{1}{5}} = \frac{y}{\frac{1}{3}}$. x şi y sunt invers proporţionale cu 5 şi 3.

b) Înlocuind $x = \frac{3y}{5}$ în ecuaţie avem: $\frac{6y}{5} + 5y = 310$ iar $\frac{31y}{5} = 310$ cu soluţia $y = 50$ iar $x = 30$.

14. a) $E(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$.

b) Descompus în factori $N = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x-1)^2$, iar ambii factori ai produsului sunt pătrate ale unor numere reale, deci sunt nenegativi. Aşadar $N \geq 0$. Egalitatea are loc

Scanned with OKEN Scanner

dacă $x^2 = 0$ sau $(x-1)^2 = 0$, adică $x \in \{0, 1\}$.

c) $E(n)$ se mai scrie $E(n) = n^4 - 2n^3 + n^2 + n^2 - 2n + 1 = n^2(n^2 - 2n + 1) + (n^2 - 2n + 1) = (n^2 - 2n + 1)(n^2 + 1) = (n-1)^2(n^2 + 1)$ iar numitorul raportului $n^3 + n - n^2 - 1 = n(n^2 + 1) - (n^2 + 1) = (n^2 + 1)(n - 1)$.

Valoarea raportului este $\frac{(n-1)^2(n^2+1)}{(n^2+1)(n-1)} = n-1 \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N}, n > 1$.

15. a) Vezi **figura 1.**

b) $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{24^2\sqrt{3}}{4} = 144\sqrt{3}$ cm^2 iar $\mathcal{A}_{ABB'A'} = 24 \cdot 12 = 288$ cm^2.

Conform formulei $\mathcal{A}_t = 3 \cdot 288 + 2 \cdot 144\sqrt{3} = 288\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)$ cm^2.

c) Fie punctele M şi N, unde M este mijlocul muchiei (BC) şi $AN \perp MA'$ $(N \in MA')$ **(fig. 1)**. În triunghiul echilateral ABC, AM fiind mediană este şi înălţime, deci $AM \perp BC$. Prisma dată fiind dreaptă avem $AA' \perp (ABC)$, de unde $AA' \perp BC$ şi cum $AM \cap AA' = \{A\}$ rezultă că $BC \perp (AMA')$ şi deoarece $AN \subset (AMA')$ avem $AN \perp BC$. Dar $AN \perp MA'$ şi cum $A'M \cap BC = \{M\}$ conduce la $AN \perp (A'BC)$. Deci distanţa de la punctul A la planul $(A'BC)$ este egală cu lungimea segmentului AN. În ΔABC echilateral: $AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ cm.

În $\Delta ABA'$ conform teoremei lui **Pitagora** avem $A'B^2 = AA'^2 + AB^2 = 12^2 + 24^2$, de unde $A'B = 12\sqrt{5}$ cm. În $\Delta A'CB$ isoscel: $m(\sphericalangle A'MB) = 90°$ şi $A'M^2 = A'B^2 - MB^2 = 720 - 144 = 576$ de unde $A'M = 24$ cm.

În $\Delta AMA'$ conform celei de a doua **teoreme a înălţimii**

$AN = \frac{AA' \cdot AM}{A'M} = \frac{12 \cdot 12\sqrt{3}}{24} = 6\sqrt{3}$ cm.

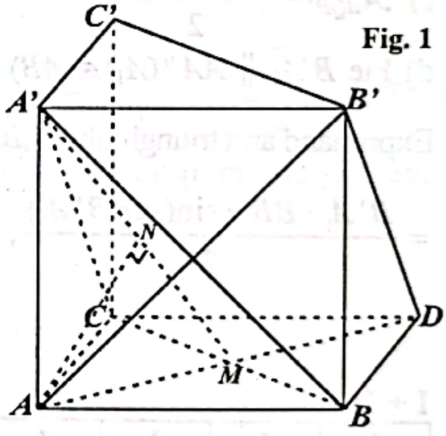


Fig. 1

d) Fie D simetricul punctului A faţă de punctul M **(fig. 1)**. Atunci patrulaterul $ABDC$ este paralelogram, cu $AB = AC$, deci $ABDC$ este chiar romb, de unde $AB \parallel CD$. Din $A'B' \parallel AB$; $A'B' = AB$; $AB \parallel CD$ şi $AB = CD$ rezultă că $A'B' \parallel CD$ şi $A'B' = CD$, deci patrulaterul $A'CDB'$ este paralelogram, de unde $A'C \parallel B'D$. Prin urmare $m(\sphericalangle(AB', A'C)) = m(\sphericalangle(AB', B'D)) = m(\sphericalangle AB'D)$. Prisma $ABCA'B'C'$ fiind triunghiulară regulată are feţele laterale dreptunghiuri congruente ce au diagonalele congruente. Deci $(AB') \equiv (A'C)$ şi cum $(A'C) \equiv (B'D)$ rezultă că $(AB') \equiv (B'D)$ adică $\Delta AB'D$ este isoscel. Punctul M fiind mijlocul segmentului (AD) avem $MB' \perp AD$ şi $AD = 2 \cdot AM = 24\sqrt{3}$ cm. Din $\Delta ABB'$ dreptunghic cu teorema lui **Pitagora** se obţine $AB'^2 = AB^2 + BB'^2 = 24^2 + 12^2 = 720$, de unde $AB' = 12\sqrt{5}$cm. În $\Delta B'MB$: $m(\sphericalangle B'BM) = 90°$ iar $B'M^2 = BB'^2 + MB^2 = 144 + 144 = 288$, deci $B'M = 12\sqrt{2}$ cm. Exprimăm aria $\Delta AB'D$ astfel: $\mathcal{A}_{AB'D} = \frac{B'M \cdot AD}{2} = \frac{AB' \cdot B'D \sin(\sphericalangle AB'D)}{2}$,

de unde prin înlocuire se obţine $\sin(\sphericalangle AB'D) = \frac{12\sqrt{2} \cdot 24\sqrt{3}}{12\sqrt{5} \cdot 12\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 54

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
18	4	-7	10000	21	5	125	24	A	D	D	B

III. 13. a) Din enunț $\frac{a}{4}=\frac{b}{2}\Big|\cdot 2 \Leftrightarrow b=\frac{1}{2}\cdot a \Leftrightarrow b=\frac{50}{100}\cdot a \Rightarrow$ procentul este 50%.

b) Conform definiției mediei aritmetice $\frac{a+b}{2}=24 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=48 \\ a=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=32 \\ b=16 \end{cases}$.

14. a) Rezultatul $f(-3)\cdot f(-7)=5$.

b) $f(0)=2 \Rightarrow A(0;\ 2)\in G_f$ şi $f(2)=4 \Rightarrow B(2,\ 4)\in G_f$ (**fig.1**). Graficul funcției f este dreapta AB.

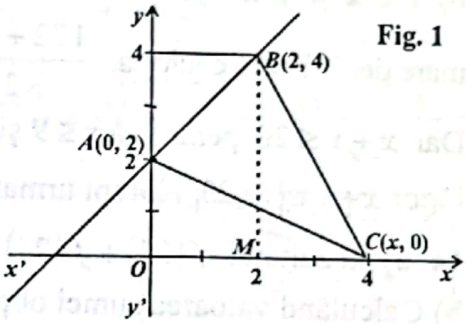


Fig. 1

c) Considerăm că punctul C are coordonatele $C(x,\ 0)$. Fie punctul $M(2;\ 0)$. Din triunghiurile dreptunghice MBC şi OAC cu **teorema lui Pitagora** obținem relațiile: $AC^2 = OC^2 + OA^2 = x^2 + 2^2 = x^2 + 4$ şi $BC^2 = MB^2 + MC^2 = 4^2 + |x-2|^2 = 16 + x^2 - 4x + 20$. Din $AC = BC$ rezultă ecuația $x^2 - 4x + 20 = x^2 + 4$ cu soluția 4. Deci $C(4;\ 0)$.

15. a) Vezi **figura 2.**

b) Notăm cu $a = VO = BC$. Aplicând **teorema lui Pitagora** în $\Delta ABM \overset{T.P}{\Rightarrow} AM^2 = AB^2 + BM^2 \Rightarrow MA = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ (1). În ΔVOB avem: $VB^2 = VO^2 + OB^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{6a^2}{4}$.

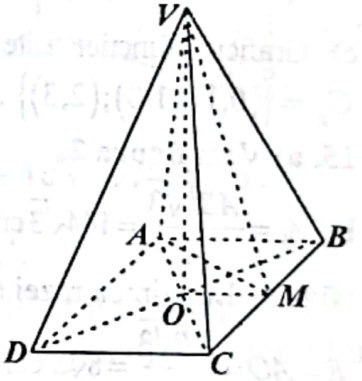


Fig. 2

În $\Delta VMB \Rightarrow VB^2 = VM^2 + MB^2 \Rightarrow VM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ (2). Din (1) şi (2) rezultă că $MA = VM$, iar triunghiul AVM este isoscel.

c) Apotema are lungimea $VM = \frac{a\sqrt{5}}{2} = 4\sqrt{5} \Rightarrow a = 8$ cm şi dacă înlocuim în formula volumului $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$ şi $A_b = l^2 = 64\,\text{cm}^2$; $V = \frac{512}{3}\,\text{cm}^3$.

d) Notăm cu $x = d\left(A;(VBC)\right)$. Volumul piramidei $VABC$ este jumătate din volumul piramidei V_{ABCD}. $V_{VABC} = \frac{256}{3}\,\text{cm}^3$; $V_{VABC} = \frac{A_{VBC}\cdot x}{3}$; $A_{VBC} = \frac{VM\cdot BC}{2} = \frac{4\sqrt{5}\cdot 8}{2} = 16\sqrt{5}\,\text{cm}^2$.

Atunci lungimea $x = \frac{16\sqrt{5}}{5}$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 55

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
29	$\frac{5}{8}$	0,75	160	53	5	21	$16\sqrt{3}$	B	D	D	C

III. 13. a) Conform definiției mediei aritmetice ponderate avem că :

$$m_p = \frac{a_1p_1 + a_2p_2 + ... + a_7p_7}{p_1 + p_2 + ... + p_7} = \frac{10\cdot 2 + 9\cdot 3 + 8\cdot 6 + 7\cdot 6 + 6\cdot 5 + 5\cdot 1 + 4\cdot 2}{2+3+6+6+5+1+2} = 7{,}20 .$$

b) Fie x și y notele celor doi elevi. Atunci pentru ca media să fie mai mare decât 7,60 trebuie ca: $\frac{172 + x + y}{25} > 7{,}60$ de unde $x + y > 18$.

Dar $x + y \le 20$ pentru că $x \le 9$ și $y \le 9$.

Deci $x+y \in \{19,20\}$. Drept urmare $(x,y) \in \{(9,10);(10,9);(10,10)\}$.

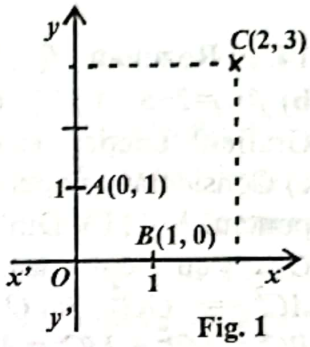


Fig. 1

14. a) Rezultatul $f(23) + f(24) = 47$.

b) Calculând valoarea sumei obținem că :

$$S = (-1)^{13} + 13 + (-1)^{14} + 14 + ... + (-1)^{47} + 47 + (-1)^{48} + 48 = \frac{(13+48)\cdot 36}{2} = 1098 .$$

c) Graficul funcției este mulțimea formată din punctele $G_g = \{(0,1);(1,0);(2,3)\}$. (Vezi **figura 1**)

15. a) Vezi **figura 2.**

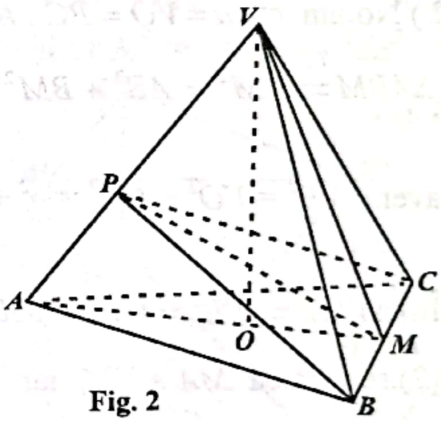


Fig. 2

b) $A_b = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 144\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Fie $VO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$ (**fig. 2**). Lungimea razei cercului circumscris bazei este $R = AO = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$ cm. În triunghiul dreptunghic VOA

$\Delta VOA \overset{T.P}{\Rightarrow} VO^2 + OA^2 = VA^2 \Rightarrow VO = 4\sqrt{33}$ cm.

Înlocuind în formula volumului $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$ rezultă că $V = 576\sqrt{11}\ \text{cm}^3$.

c) Fie $x = d(M, AV)$. $AM = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ cm ; $A_{VAM} = \frac{VO\cdot AM}{2} = \frac{x\cdot VA}{2} \Rightarrow x = \frac{12\sqrt{55}}{5}$ cm.

d) Fie $MP \perp VA$, $P \in VA$. Ținând cont de faptul că:

$$\left.\begin{matrix} AM \perp BC \\ VM \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} BC \perp (VAM) \\ VA \subset (VAM) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} BC \perp VA \\ MP \perp VA \\ M \in BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} VA \perp (PBC) \\ PB \subset (PBC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} VA \perp PB \\ VA \perp MP \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sphericalangle((VAM),(VAB)) = \sphericalangle BPM$. În triunghiul dreptunghic $PMB \Rightarrow tg(\sphericalangle BPM) = \frac{BM}{PM}$.

$BM = 12cm$ și $MP = \frac{12\sqrt{55}}{5}$ (din punctul **c**) $\Rightarrow tg(\sphericalangle BPM) = \frac{\sqrt{55}}{11}$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 56

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	18	$\frac{5}{2}$	2000	120	180	48	3	C	B	D	A

III. 13. a) Din proporționalitate avem că $\frac{a}{2}=\frac{b}{5}\Leftrightarrow a=\frac{2b}{5}\Leftrightarrow a=\frac{40}{100}\cdot b\Rightarrow p=40\%$.

b) Înlocuind $a=2k$ și $b=5k\Rightarrow 3\cdot 2k+5k=44\Rightarrow k=4$. Obținem că $a=8$ și $b=20$.

14. a) Valoarea expresiei $2a^2-20=2\cdot\left(\sqrt{10}\right)^2-20=0$.

b) Ridicând la pătrat conform formulei $x^2=3-\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{9-5}+3+\sqrt{5}=10$.

Observație! Altfel putem scrie $x=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}}{\sqrt{2}}=$

$\frac{\left|\sqrt{5}-1\right|+\left|\sqrt{5}+1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\sqrt{10}$.

c) Din punctul anterior $\left.\begin{array}{l}x^2=10\\ \text{dar } x>0\end{array}\right\}\Rightarrow x=\sqrt{10}$.

$\left(\sqrt{10}-x-1\right)^{2007}=\left(\sqrt{10}-\sqrt{10}-1\right)^{2007}=-1$.

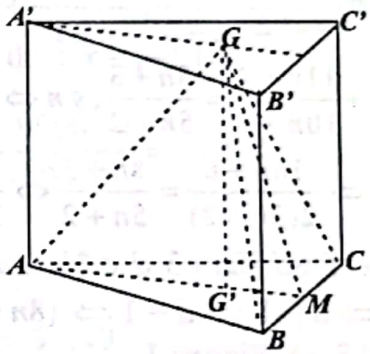


Fig. 1

15. a) Vezi **figura 1.**

b) Conform formulei $A_t=A_l+2A_b\Rightarrow A_b=4\sqrt{3}\text{ cm}^2\Leftrightarrow\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}\Rightarrow l=4\text{ cm}$.

c) $V=A_b\cdot h$; $A_l=P_b\cdot h\Leftrightarrow 12h=48\Rightarrow h=4\text{ cm}$; $V=16\sqrt{3}\text{ cm}^3$.

d) Notăm $x=d(A;(GBC))$. Aplicăm formula pentru calculul volumului piramidei $GABC$ în două moduri. Fie $GG'\perp(ABC);G'\in(ABC)$, iar M mijlocul segmentului $[BC]$ și x distanța de la punctul A la planul (GBC). $V_{GABC}=\frac{GG'\cdot A_{ABC}}{3}=\frac{x\cdot A_{GBC}}{3}(1)$;

iar $G'M=\frac{AB\sqrt{3}}{6}=\frac{4\sqrt{3}}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{ cm}$. În $\Delta\,GG'M$, $GM^2=GG'^2+G'M^2;GM=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\text{ cm}$;

Din $GC'\perp(ABC)$; $G'M\perp BC$; $G'M$, $BC\subset(ABC)$. Conform **teoremei celor trei perpendiculare** rezultă că $GM\perp BC$, de unde $A_{GBC}=\frac{GM\cdot BC}{2}=\frac{4\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\text{ cm}^2$;

din (1) avem $4\cdot 4\sqrt{3}=x\cdot\frac{4\sqrt{13}}{\sqrt{3}};x=\frac{12\sqrt{13}}{13}\text{cm}$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 57

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	$\frac{2}{3}$	$\sqrt{2}$	$(-\infty,5)$	6	48	25	125	A	A	B	D

III. 13. Fie x = numărul elevilor; m = numărul elevilor care participă la cercul de matematică; i = numărul elevilor care participă la cercul de informatică;

$m = \frac{70}{100}\cdot x = \frac{3x}{4}$; $i = \frac{45}{100}\cdot x = \frac{9}{20}x$; $x = m + 1 - 42 \Rightarrow x = \frac{7x}{10} + \frac{9x}{20} - 42 \Rightarrow 20x = 14x = 9x - 840 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = 840 \Rightarrow x = 280$ elevi; $m = \frac{7x}{10} = \frac{7\cdot 280}{10} = 196$ elevi; $i = \frac{9x}{20} = \frac{9\cdot 280}{20} = 126$ elevi.

a) numărul total de elevi este 280; **b)** doar la matematică participă $196 - 42 = 154$ elevi;

14. a) $5n^2 - 3n - 2 = 5n^2 - 5n + 2n - 2 = 5n(n-1) + 2(n-1) = (n-1)(5n+2)$

b) $\frac{4-25n^2}{5n^2-3n-2} : \frac{4-10n}{n-1} + \frac{11n+4}{10n+4} = \frac{8n+3}{5n+2}, \forall n \Leftrightarrow \frac{(2-5n)(2+5n)}{(5n+2)(n-1)} \cdot \frac{n-1}{2(2-5n)} +$

$+ \frac{11n+4}{10n+4} = \frac{8n+3}{5n+2}, \forall n \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{11n+4}{2(5n+2)} = \frac{8n+3}{5n+2} \Leftrightarrow \frac{5n+2+11n+4}{2(5n+2)} = \frac{8n+3}{5n+2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{16n+6}{2(5n+2)} = \frac{8n+3}{5n+2} \Leftrightarrow \frac{2(8n+3)}{2(5n+2)} = \frac{8n+3}{5n+2} (A)$

c) Fie $d \mid 8n+3, d \in \mathbb{N} \Rightarrow d \mid 5(8n+3) - 8(5n+2) \Rightarrow d \mid 5n+2 \Rightarrow d \mid 40n+15-40n-16 = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow d \mid -1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow (8n+3; 5n+2) = 1 \Rightarrow$ fracția este ireductibilă.

15. a) Figura 1.

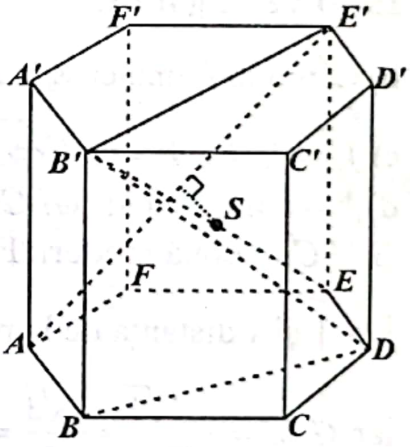


Fig. 1

b) $A_l = P_b \cdot h = 6 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$ cm^2.

c) $E'D' \parallel ED$ ($EDD'E'$ dreptunghi) $\Rightarrow E'D' \parallel AB$

$ED \parallel AB$ ($ABCDEF$ hexagon regulat) $\Rightarrow$

$\Rightarrow ABD'E'$ paralelogram $\Rightarrow \left.\begin{matrix} AE' \parallel BD' \\ BD' \subset (DBB') \end{matrix}\right| \Rightarrow AE' \parallel (DBB')$.

d) $BB' \parallel EE'$ şi $[BB'] \equiv [EE']$ şi $EE' \perp (ABE)$ rezultă ca patrulaterul $BEE'B'$ este dreptunghi de unde $[BS] \equiv [SE']$ şi $S \in [BE']$. Trebuie să determinăm distanța de la mijlocul laturii $E'B$ a triunghiului ABE' la latura AE'.

Din $E'E \perp (ABE)$, $EA \perp AB$ ($ABCDEF$ hexagon regulat) şi $AB, AE \subset (ABE)$ rezultă că $E'A \perp AB$ **(teorema celor trei perpendiculare)**.

În triunghiul dreptunghic ABE': $d(S, AE') = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 58

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	a	582	3,5	20	16	48	576	A	D	B	B

III. 13. a) Dacă notăm cu x numărul, conform teoremei împărțirii cu rest obținem $x=13\cdot c+7$ (unde c este câtul împărțirii). Cum $c\in\mathbb{N}$ atunci:

$x\in\{7,20,33,46,59,72,85,98,111,124,...\}$, dar din condiția de minim avem c=111.

b) Cel mai mare număr de trei cifre se obține pentru $c=76$, adică $995=13\cdot 76+7$ iar cel mai mic număr de trei cifre se obține pentru $c=8$, adică $111=13\cdot 8+7$. Deci sunt $76-7=69$ de numere.

14. a) Avem $x^3-9x=x(x^2-9)=x(x+3)(x-3)$ și $x^3+x-9x-9=$

$=x^2(x+1)-9(x+1)=(x+1)(x^2-9)=(x+1)(x-3)(x+3)$.

Simplificând obținem valoarea raportului $F(x)=\dfrac{x+1}{x}$.

b) Avem ecuația $\dfrac{x+1}{x}=x+1$ de unde $x+1=x^2+x$, adică $x^2=1$, deci $x\in\{-1,1\}$.

c) Suma se scrie echivalent $S=\dfrac{6+1}{6}+\dfrac{12+1}{12}+\dfrac{20+1}{20}+\dfrac{30+1}{30}+...+\dfrac{9900+1}{9900}=$

$=1+\dfrac{1}{2\cdot 3}+1+\dfrac{1}{3\cdot 4}+1+\dfrac{1}{4\cdot 5}+...+1+\dfrac{1}{99\cdot 100}=$

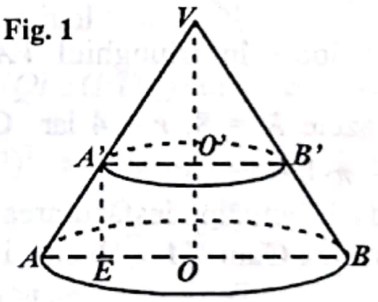
$=98+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+...+\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}=98+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{100}=98,49$.

Am aplicat relația $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, care se demonstrează prin calcul direct.

15. a) Vezi **figura 1.**

b) Considerăm secțiunea axiala $ABB'A'$ a trunchiului de con și construim $A'E\perp AB, E\in[AB]$ (**figura 1**). Din media aritmetică rezultă $R+r=10$ și aplicand **T. Pitagora** în triunghiul dreptunghic $AA'E$ avem $R-r=4=AE$ și obținem $R=7$ cm și $r=3$ cm.

Fig. 1



c) $\mathcal{V}=\dfrac{\pi\cdot h}{3}\cdot(R^2+r^2+r\cdot R)=\dfrac{\pi\cdot 3}{3}\cdot(7^2+3^2+3\cdot 7)=79\pi$ cm^3.

d) Fie V vârful conului din care provine trunchiul. Din asemănarea triunghiurilor $VA'O'$ și VAO (**teorema fundamentală a asemănării**) rezultă că $\dfrac{VA'}{VA}=\dfrac{A'O'}{AO}$ și $VA=\dfrac{VA'\cdot AO}{A'O'}$

sau $VA=\dfrac{(VA-AA')AO}{A'O'}$ și rezolvând ecuația $3VA=(VA-5)7$ obținem $VA=\dfrac{35}{4}$ cm.

Conform formulei $u^\circ=\dfrac{R}{G}\cdot 360^\circ$, deci $u^\circ=288^\circ$, unde u° este măsura unghiului căutat.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 59

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
120	9	4	15	96	24	64	$36\sqrt{3}$	D	B	C	D

III.13. a) Pentru a obține submulțimile cu 9 elemente, se elimină, pe rând, câte un element. Având în vedere că aceasta se poate face în 10 feluri sunt 10 submulțimi.

b) Numărul de submulțimi cu 0 elemente este 1, cu 1 element este 10, iar cu 2 elemente este $45\left(\frac{10\cdot 9}{2}\right)$. Ca urmare a celor stabilite anterior sunt $1 + 10 + 45 = 56$ submulțimi cu cel mult 2 elemente.

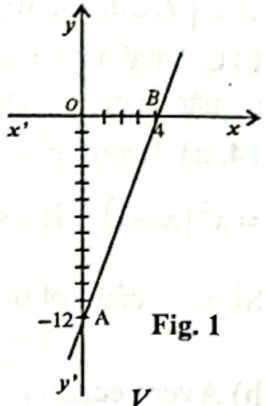


Fig. 1

14. a) Cum $1 - 3 \cdot (-5) = 16$ atunci perechea $(1; -5)$ este soluție.

b) Punctele $A(0,-12)$ și $B(4,0)$ aparțin graficului funcției și conchidem că graficul funcției este dreapta AB.

c) Din prima ecuație $x = 3y + 16$ și substituind în cea de a doua ecuație avem $3(3y+16) - y = 12$ cu soluția $y = -\frac{9}{2}$ iar $x = \frac{5}{2}$.

15. a) Vezi **figura 2.**

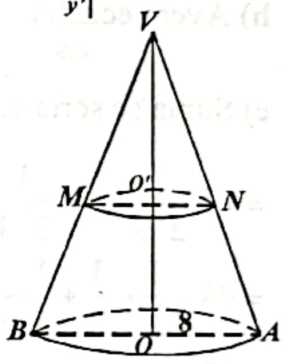


Fig. 2

b) În formula $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$ înlocuim cu valoarea înălțimii

$h = VO = \sqrt{VA^2 - OA^2} = \frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$, $V = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 8\sqrt{3}}{3} = \frac{512\pi\sqrt{3}}{3}$.

c) Fie N mijlocul muchiei $[VA]$ și atunci $MN \parallel AB$. Lungimea generatoarei $G = MB = \frac{VB}{2} = \frac{16}{2} = 8$ cm. Cum MN este linie mijlocie în triunghiul VAB atunci $O'N = \frac{OA}{2} = 4$ și atunci obținem razele $R = 8$, $r = 4$ iar $G = 8$. Aplicând formula $A_l = \pi g(R + r) =$ $= \pi \cdot 8 \cdot (4 + 8) = 96\pi$.

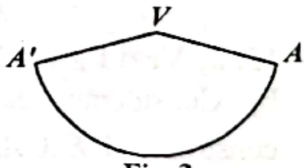


Fig. 3

d) Efectuăm desfășurarea suprafeței laterale. Fie sectorul de cerc VAA'. Cum $VA = 16$ cm și $AA' = 2\pi R = 2\pi \cdot 8 = 16\pi$ atunci conform formulei $m(\sphericalangle A'VA) = \frac{16\pi \cdot 360^\circ}{32\pi} = 180^\circ$ și atunci desfășurarea e un semicerc (**figura 3**). Cea mai scurtă distanță de la A la M este egală cu $\sqrt{AV^2 + VM^2} = \sqrt{16^2 + 8^2} = 8\sqrt{5}$ cm (vezi **figura 4**).

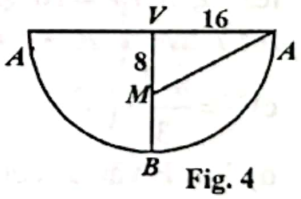


Fig. 4

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 60

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
30	12	140	$\frac{1}{3}$	90	36	140	4	B	C	A	C

III. 13. a) Din proporționalitate $\frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}\Rightarrow a=\frac{4b}{5}=\frac{80b}{100}=80\%b$. Procentul este 80%.

b) Proporția derivată $\frac{a}{4}=\frac{c}{7}=\frac{3a+c}{3\cdot 4+7}=\frac{285}{19}=15$ ne dă $a=4\cdot 15=60; c=7\cdot 15=105$, b=75.

14. a) Simplificând $\frac{x}{x^2-x}=\frac{x}{x(x-1)}=\frac{1}{x-1}$.

b) $2+x-2x^2-x^3=2(1-x^2)+x(1-x^2)=(2+x)(1-x^2)=(x+2)(1-x)(1+x)$.

c) Expresia se mai scrie astfel $E(x)=\left(\frac{x}{x^2-x}+\frac{x+2}{2+x-2x^2-x^3}+\frac{x^2}{x^2+x}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)=$

$=\left(\frac{1}{x-1}+\frac{x+2}{(x+2)(1-x)(1+x)}+\frac{x^2}{x(x+1)}\right)\cdot\frac{x^2-1}{x}=\frac{x+1-1+x^2-x}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{x}=\frac{x^2}{x}=x$.

15. a) Vezi **figura 1.**

b) Cum NQ şi NR sunt diagonale în pătrate de latură 10 cm atunci $NQ = NR = 10\sqrt{2}$ cm. Deoarece triunghiul QPR este dreptunghic isoscel atunci $RQ = 10\sqrt{2}$ cm , conchidem aşadar că ΔNRQ este echilateral. Cum $NP = PR = PQ$ (laturi în pătrate) concluzia este că piramida $PNRQ$ este regulată.

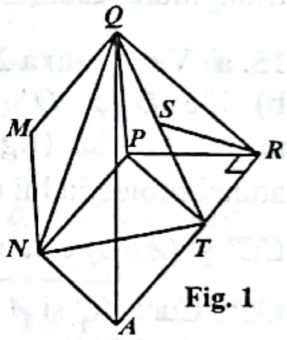


Fig. 1

c) Conform teoremei celor trei perpendiculare se arată că $QR\perp RT$. Fie S mijlocul segmentului QT, atunci RS este mediană în triunghiul dreptunghic QRT şi atunci $RS=\frac{QT}{2}$. ΔQPT fiind dreptunghic în P ($QP\perp(PTR)$) atunci conform teoremei **lui Pitagora** avem $QT^2=PQ^2+PT^2=10^2+(10\sqrt{2})^2=(10\sqrt{3})^2\Rightarrow QT=10\sqrt{3}\Rightarrow RS=5\sqrt{3}$.

d) Fie A simetricul punctului R față de T şi atunci AT=TR şi cum TR=NP rezultă că AT=NP iar patrulaterul $ATPN$ va fi paralelogram şi atunci $PT \parallel NA \Rightarrow \widehat{PT, NQ}=\sphericalangle ANQ$;

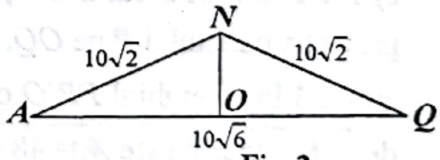


Fig. 2

$AN = PT = NQ = 10\sqrt{2}$ cm. Cum AQ ipotenuză în triunghiul dreptunghic QPA atunci $AQ^2 = PQ^2 + AP^2$ iar cum AP ipotenuză în triunghiul dreptunghic APR, $AP^2 = 10^2 + 20^2 = (10\sqrt{5})^2 \Rightarrow AQ^2 = 10^2 + 500 = 600 \Rightarrow AQ = 10\sqrt{6}$.

În Δ NAQ, fie O mijlocul segmentului $[AQ]$ şi atunci $OQ = 5\sqrt{6}$ (vezi **figura 2**). Valoarea sinusului unghiului este :

$\sin Q\hat{N}O=\frac{5\sqrt{6}}{10\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \sin(\sphericalangle QNO)=60^\circ\Rightarrow m(\sphericalangle ANQ)=120^\circ\Rightarrow m(\widehat{PT, NQ})=120^\circ$.

Unghiul ascuțit are măsura egală cu 60^0.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 61

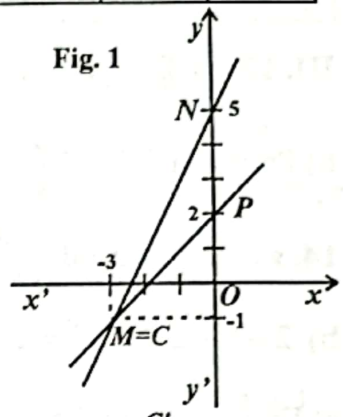
I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20	6	125	$\frac{2}{3}$	999	$16\sqrt{3}$	125	48	C	A	B	D

III. 13. a) S-au folosit $\frac{20}{100}\cdot 1500 = 300\ l = 300000$ ml smântână, deci au fost necesare $\frac{300000}{500} = 600$ pungi. **b)** $\frac{300}{400}\ l = \frac{3}{4}\ l = 750$ ml.

14. a) Punctele $M(-3,-1)$ si $N(0,5)$ aparţin graficului funcţiei f iar punctele $M(-3,-1)$ si $P(0,2)$ aparţin graficului funcţiei g. Funcţia f are ca reprezentare dreapta MN iar funcţia g are ca reprezentare dreapta MP.

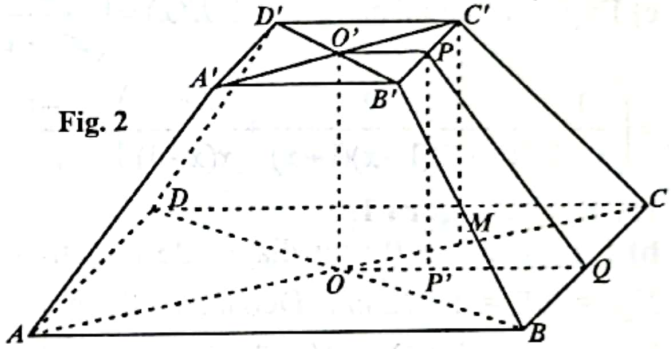
Fig. 1



b) Fie $C(a, b)$ punctul de intersecţie, deci $f(a) = g(a) = b$, adică $2a+5 = a+2$, deci $a = -3$, $b = -1$. Deci $C=M$

c) Triunghiul căutat este ΔMNP. Înălţimea din M este $|x_M| = 3$ şi $NP = 3$, deci aria triunghiului este $\frac{NP\cdot h_M}{2} = \frac{9}{2}$.

Fig. 2



15. a) Vezi **figura 2.**

b) Fie O şi O' centrele bazelor mari, respectiv, mici. (**fig. 3**) Cum $OO' \subset (ACA')$ atunci proiecţia lui C' pe planul (ABC) este inclusă în sementul $[CA]$, deci unghiul dintre CC' şi (ABC) este unghiul $\sphericalangle C'CA$. Construim $C'M \perp AC$, $M \in [AC]$ iar atunci $C'M = OO'$. Cum AC şi $A'C'$ sunt diagonale în pătrate, $AC = 8\sqrt{2}$ cm iar $A'C' = 4\sqrt{2}$ cm şi , cum în trapezul $ACC'A'$:

$MC = \frac{AC - A'C'}{2} = 2\sqrt{2}$ cm rezultă că $tg(\sphericalangle C'CM) = tg60^\circ = \frac{C'M}{MC} = \sqrt{3} \Rightarrow C'M = 2\sqrt{6}$ cm.

c) Fie P mijlocul lui $B'C'$ şi Q mijlocul lui BC atunci PQ este apotema trunchiului. Fie P' proiecţia punctului P pe OQ. $O'P = 2$cm, $OQ = 4$cm, $OO' = 2\sqrt{6}$ cm. Conform T. lui **Pitagora** aplicată în triunghiul $PP'Q$ obţinem lungimea $PQ = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ cm, atunci $A_l = 48\sqrt{7}$ cm^2, deci aria totală este $A_t = 48\sqrt{7} + 64 + 16 = 80 + 48\sqrt{7}$ cm^2.

d) Fie lungimea $h_1 = d(A,(DCC'))$ reprezentând lungimea înălţimii din A a piramidei $ADCD'$. $\mathcal{V}_{ADCD'} = \frac{h_1 \cdot \mathcal{A}_{DCD'}}{3} = \frac{OO' \cdot \mathcal{A}_{ACD}}{3} \Rightarrow h_1 = \frac{OO' \cdot \mathcal{A}_{ACD}}{\mathcal{A}_{DCD'}}$. $\mathcal{A}_{ACD} = \frac{8^2}{2} = \frac{64}{2} = 32$ cm^2.

$A_{DCD'} = \frac{DC \cdot a_p}{2} = 8\sqrt{7}$ cm^2 şi atunci lungimea distanţei căutate este egală cu $\frac{8\sqrt{42}}{7}$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 62

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
36	29	1,5	21	1000	15	44	20	C	B	A	B

III. 13. a) În cutie sunt $40\%\cdot 120=\frac{40}{100}\cdot 120=48$ CD-uri înregistrate cu filme.

b) Sunt $120-(25+48+32)=15$ CD-uri neînregistrate şi atunci rezultă că probabilitatea este egală, conform definiției cu $\frac{15}{120}=\frac{1}{8}$.

14. a) Cum $\frac{6}{2\cdot 1+1}=\frac{6}{3}=2\in\mathbb{Z}$ atunci $1\in A$, iar cum $(2\cdot 1+\sqrt{3})(2-1\cdot\sqrt{3})=4-3=1$ atunci $1\in B$. Ca urmare a celor stabilite anterior $1\in A\cap B$.

b) Daca $\frac{6}{2x+1}\in\mathbb{Z}$ atunci $2x+1/6$ şi, cum $2x+1$ este număr impar, atunci avem că $2x+1\in\{-3,-1,1,3\}$ iar $x\in\{-2,-1,0,1\}$. Conchidem că suma elementelor lui A este -2.

c)Trebuie ca $(2x+\sqrt{3})(2-x\sqrt{3})=1\Leftrightarrow 4x-2x\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3x=1\Leftrightarrow x-1+2\sqrt{3}(1-x)=0$.

Şi atunci $(x-1)\left(1-2\sqrt{3}\right)=0$ cu soluția $x=1$. Aşadar $B=\{1\}$.

15. a) Vezi **figura 1.**

b) Aplicăm formula volumului: $\mathcal{V}=\mathcal{A}_B\cdot h=6^2\cdot 7=252\ \text{cm}^2$.

c) Distanța este lungimea perpendicularei din O pe $A'C$ şi o notăm cu OP. Triunghiurile COP şi $CA'A$ sunt asemenea şi atunci $\frac{CO}{CA'}=\frac{OP}{AA'}$ de unde $OP=\frac{CO\cdot AA'}{CA'}$ iar $OP=\frac{21\sqrt{2}}{11}$ cm,

deoarece $CO=\frac{AB\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$ cm, $CA'=\sqrt{6^2+6^2+7^2}=11$ cm

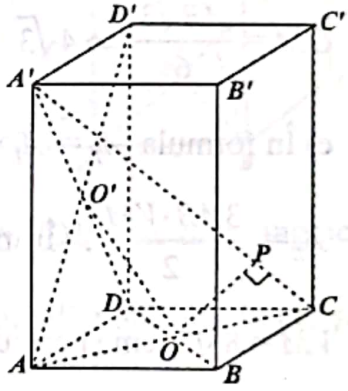


Fig. 1

d) Cum OO' este linie mijlocie în $\Delta ACD'$ atunci $OO'\|CD'$ iar $\text{m}(\widehat{OO',BC})=m(\sphericalangle BCD')$, dar cum triunghiul BCD' dreptunghic în C rezultă că $m(\widehat{BC,OO'})=90^\circ$.

VARIANTA 63

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20	a	1002	$\frac{3}{10}$	5	160	$\frac{256}{3}$	6	A	B	C	D

III. 13. a) Cum $b\le 20$ şi b este număr par atunci B $=\{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$ iar produsul elememntelor $P=0$.

b) Cum $a\le 23$ şi a este număr impar atunci A $=\{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23\}$, A $\cup$ B $=\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 23\}$ şi atunci cardinalul mulțimii A $\cup$ B este egal cu 23.

Scanned with OKEN Scanner

14. a) Cum $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$ rezultă că perechea $(1; 2)$ este soluție a ecuației.

b) Punctele $A(1,2)$ si $B(4,0)$ sunt situate pe dreapta de ecuație $2x+3y=8$, deoarece coordonatele acestora verifică ecuația din enunț. Reprezentarea este dreapta AB.

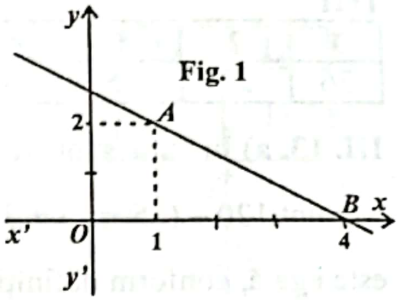


Fig. 1

c) Avem echivalența sistemelor:

$$\left.\begin{matrix} 2(2x+3y)+3(x+y)= & 8 \\ (2x+3y)-3(x+y) & =-5 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 7x+9y= & 8 \\ -x & =-5 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3 \\ x=5 \end{cases}.$$

15. a) Vezi **figura 2.**

b) Considerăm M mijlocul segmentului $[BC]$ şi atunci $AM \perp BC$ şi $VM \perp BC$. Piramida $VABC$ fiind regulată atunci $pr_{(ABC)}V = O$, centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Atunci $\sphericalangle((VBC),(ABC)) = \sphericalangle VMA$ şi rezultă că $m(\sphericalangle VMA) = 60°$.

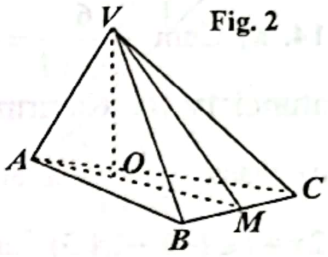


Fig. 2

$VO = 12$ cm. $tg\,60^o = tg\,(\sphericalangle VMA) = \sqrt{3} = \frac{VO}{OM}$ şi $OM = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ cm. Cum lumgimea lui OM reprezintă raza cercului înscris în ΔABC avem că $OM = \frac{AB\sqrt{3}}{6} \Rightarrow 4\sqrt{3} = \frac{AB\sqrt{3}}{6} \Rightarrow AB = 24$ cm.

c) În formula $A_T = A_L + A_B$ înlocuim $A_B = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{24^2\sqrt{3}}{4} = 144\sqrt{3}$ cm^2.

$A_L = \frac{3AB \cdot VM}{2}$. În triunghiul VOM conform teoremei lui **Pitagora** obținem lungimea $VM = 8\sqrt{3}$ cm şi calculăm $A_L = \frac{3 \cdot 24 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 288\sqrt{3}$ cm^2. Aşadar $A_T = 432\sqrt{3}$ cm^2.

d) Volumul piramidei $VABC$ este $\frac{A_{\Delta ABC} \cdot VO}{3} = \frac{144\sqrt{3} \cdot 12}{3} = 576\sqrt{3}$ cm^3. Raportul dintre volumul piramidei mici şi a celei mari este cubul raportului înălțimilor, deci $\frac{\frac{8\sqrt{3}}{3}}{576\sqrt{3}} = \frac{1}{6^3}$. Reiese că înălțimea căutată are lungimea $\frac{5}{6} \cdot VO = 10$ cm.

VARIANTA 64

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
261	11	78	37	$9\sqrt{2}$	42	9	260	D	C	A	B

III 13. Din cele 20 de bile, 14 nu sunt negre prin urmare numărul bilelor negre este 20-14=6. Din cele 20 de bile, 15 nu sunt galbene deci 5 sunt galbene. Numărul bilelor roşii este $20 - (2+6+5) = 7$.. **a)** Probabilitatea este egala cu $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$. **b)** Sunt 7 bile roşii.

14. a) Ecuația $x^2 - x - 6 = 0$ are $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$ şi atunci soluțiile sunt

Scanned with OKEN Scanner

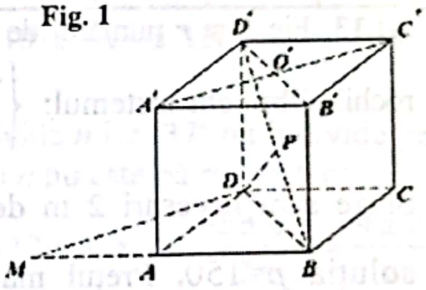
$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow x_1=-2,\ x_2=3$.

b) Expresia $x^2-x-6=x^2-3x+2x-6=x(x-3)+2(x-3)=(x-3)(x+2)$ iar expresia $3x^2-18x+27=3(x^2-6x+9)=3(x-3)^2$. Aşadar am obţinut valoarea expresiei $E(x)=\dfrac{3(x-3)^2}{x(x+1)(x+2)(x-3)}$, $x\in\mathbb{N}^*\setminus\{3\}$. Deoarece x este un număr natural atunci produsul $x(x+1)(x+2)$ este un număr divizibil cu 3, prin urmare atât numărătorul cât şi numitorul fracţiei se împart la $3(x-3)$. Deci fracţia se simplifică prin $3(x-3)$.

c) Expresia $E(n)=\dfrac{3(n-3)}{n(n+1)(n+2)}$. Cum produsul $n(n+1)(n+2)$ este număr par, $E(n)$ se simplifică prin 2 dacă $3(n-3)$ este număr par şi prin urmare n trebuie să fie număr impar diferit de 3 (pentru ca $E(n)$ să aibă sens). $S=\{n\in\mathbb{N}/n \text{ impar}, n\neq 3\}$.

15. a) Vezi **figura 1.**

Fig. 1



b) Este suficient să arătăm că dreaptă MD este perpendiculară pe două drepte concurente conţinute în planul $(D'DB)$. Acestea pot fi DD' şi DB. Într-adevăr $DD'\perp(ABC)$, $MD\subset(ABC)$ implică $D'D\perp MD$. **(1)** În ΔMDB, $[DA]$ este mediană şi înălţime iar $DA=\dfrac{MB}{2}$, prin urmare triunghiul ΔMDB este dreptunghic isoscel cu $m(\widehat{MDB})=90^\circ\Rightarrow MD\perp DB$. **(2)** Ca urmarea a celor stabilite anterior în **(1)** şi **(2)** rezultă concluzia.

c) Construim $DP\perp D'B, P\in[D'B]$. Cum $MD\perp(DD'B)$, $DP\subset(D'DB), DP\perp BD'$ conform **teoremei celor trei perpendiculare** $MP\perp BD'$.

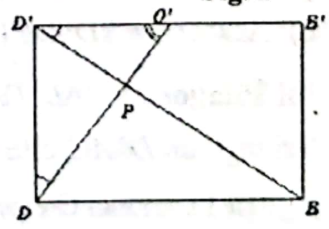
În $\Delta D'DB$ $m(\sphericalangle D)=90^\circ$, $BD=AB\sqrt{2}=10$ cm, $DD'=5\sqrt{2}$ cm iar din **T. lui Pitagora** obţinem $D'B=5\sqrt{6}$ cm, apoi din **teorema a doua a înălţimii**

$DP=\dfrac{DB\cdot DD'}{D'B}=\dfrac{10\cdot5\sqrt{2}}{5\sqrt{6}}=\dfrac{10}{\sqrt{3}}=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ cm. În triunghiul MDP conform **teoremei lui Pitagora** avem lungimea $MP=\sqrt{MD^2+DP^2}=\sqrt{100+\dfrac{100}{3}}=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ cm.

d) Fie P punctul de intersecţie al dreptelor DO' şi BD'. În dreptunghiul $BDD'B'$ (vezi **figura 2**) cunoaştem lungimile:

$DB=10\ cm$, $DD'=5\sqrt{2}\ cm$, $D'O'=O'B'=5\ cm$.

Fig. 2



Din rapoartele $\dfrac{DD'}{D'B'}=\dfrac{5\sqrt{2}}{10}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{D'O'}{B'B}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ deducem asemănarea $\Delta DD'O'\sim\Delta D'B'B\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \widehat{D'DO'} \equiv \widehat{B'D'B} \\ m(\widehat{D'DO'}) + m(\widehat{D'O'D}) = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow m(\widehat{D'O'D}) + m(\widehat{O'D'B}) = 90^\circ \Rightarrow O'D \perp D'B.$$

Observație! Se calculează folosind **teorema lui Pitagora** lungimile segmentelor DO' și $D'B$ și apoi folosind asemănarea tringhiurilor $D'PO'$ și PBD lungimile $D'P$, PB, DP, PO'. Perpendicularitatea cerută se justifică folosind reciproca **teoremei lui Pitagora** sau reciproca **teoremei înălțimii** $\left(P \in (BD')\right)$.

VARIANTA 65

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	a	$\frac{1}{2}$	3	144	5	60	16	**D**	**A**	**C**	**D**

III.13. Fie b și r numărul de metri necesari pentru confecționarea unei bluze, respectiv, unei rochii. Obținem sistemul: $\begin{cases}4b+3r=17\\3b+2r=12\end{cases}$ cu soluția $\begin{cases}b=2\\r=3\end{cases}$. **a)** Pentru confecționarea unei bluze sunt necesari 2 m de material. **b)** Fie p procentul căutat. Atunci $\frac{p}{100}\cdot 3=2$ cu soluția p=150. Prețul materialului necesar unei rochii reprezintă 150% din prețul materialului necesar unei bluze.

14.a) $F(2)=\frac{2^2-2-2}{2^2-2}=0$. **b)** $7F(x)=9 \Leftrightarrow 7(x^2-x-2)=9(x^2-2) \Leftrightarrow 2x^2+7x-4=0$ care are $\Delta=81$, $x_1=\frac{1}{2}; x_2=-4$ și cum $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ atunci $x \in \left\{\frac{1}{2}, -4\right\}$.

c) Dacă x este rațional atunci F(x) este la fel număr rațional. Produsul $\sqrt{2}\cdot F(x)$ este rațional dacă și numai dacă F(x)=0 și rezolvăm ecuația $x^2-x-2=0$. Descompunem $x^2-x-2=x^2+x-2x-2=(x+1)(x-2)$ iar soluția $x \in \{-1,2\}$.

15. a) Vezi **figura 1**.

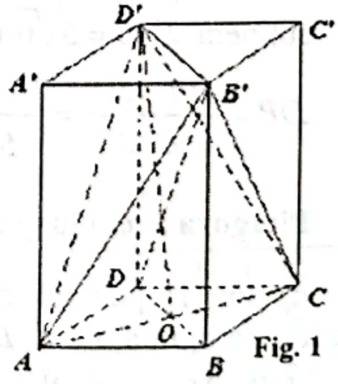


Fig. 1

b) Fie l latura bazei. În $\Delta B'BD$ dreptunghic $BB'=9$ cm, $DB'=3\sqrt{41}$ cm iar $BD=l\sqrt{2}$. Din **T. lui Pitagora** obținem: $DB'^2=BD^2+B'B^2 \Leftrightarrow 9\cdot 41=2l^2+9^2 \Rightarrow 2l^2=9(41-9)=9\cdot 32$ și atunci $l=12$ cm. $\mathcal{V}_{Prisma}=\mathcal{A}_{ABCD}\cdot h=12^2\cdot 9$ cm$^3=1296$ cm^3.

c) $\Delta D'DA \equiv \Delta D'DC(C.C.) \Rightarrow [D'A] \equiv [D'C]$. Folosind **Teorema lui Pitagora** în $\Delta D'DA$: $D'A=\sqrt{D'D^2+DA^2}=\sqrt{9^2+144}=15$ cm. Triunghiul $D'AC$ este isoscel cu laturile 15, 15 și $12\sqrt{2}$ cm. Fie O centrul bazei $ABCD$ (vezi **figura 1**). Atunci O este miljlocul lui $[AC]$ $D'O \perp AC$, $AO=6\sqrt{2}$, $D'O=\sqrt{D'A^2-AO^2}$ **(Pitagora)**

$D'O=\sqrt{225-72}=\sqrt{153}=3\sqrt{17}$ cm; $\mathcal{A}_{\Delta D'AC}=\frac{AC\cdot D'O}{2}=\frac{12\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{17}}{2}=18\sqrt{34}$ cm^2.

Scanned with OKEN Scanner

d) În **fig. 2**, $B'M \perp D'O, M \in D'O$. $AC \perp (B'BD)$ iar $B'M \subset (B'BD)$ atunci $AC \perp B'M$. Din $B'M \perp D'O, B'M \perp AC$ rezultă că $B'M \perp (D'AC)$ iar $d(B',(ACD')) = B'M$. Din asemănarea

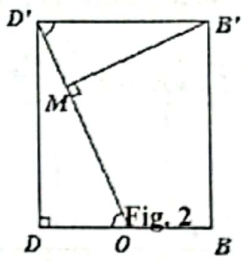


Fig. 2

$\Delta B'MD' \sim \Delta D'DO(u.u) \Rightarrow \frac{B'M}{D'D} = \frac{MD'}{DO} = \frac{B'D'}{D'O}$ şi deducem că

$\frac{B'M}{9} = \frac{MD'}{6\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{3\sqrt{17}}$, de unde $B'M = \frac{9 \cdot 12\sqrt{2}}{3\sqrt{17}} = \frac{36\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \frac{36\sqrt{34}}{17}$ cm.

VARIANTA 66

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
16	$-\frac{3}{2}$	$2^3 \cdot 3^2$	28	110	12	15	108	D	C	B	A

III.13. a) Fie $n = \overline{xyz} + \overline{yzx} + \overline{zxy} = x \cdot 100 + y \cdot 10 + z + y \cdot 100 + 10 \cdot z + x + z \cdot 100 + x \cdot 10 + y =$
$= 111x + 111y + 111z = 111(x + y + z)$ de unde $111/n$.

b) Fie $n = 3 \cdot 37(x + y + z)$. 37 fiind număr prim şi cum 37 divide n iar 37^2 nu îl divide pe n, deoarece $x + y + z$ are valoarea maximă 9+9+9=27, atunci n nu este pătrat perfect.

14. a) Obţinem ecuaţia $3x^2 - 4x + 1 = 0$ cu $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 2}{6}$

Atunci $x_1 = 1$ şi $x_2 = \frac{1}{3}$. **b)** $|E(x) - x^2| + |E(x) - x| = 0$ şi $|x^2 + x - 1 - x^2| + |x^2 + x - 1 - x| = 0$ de unde $|x - 1| + |x^2 - 1| = 0$ cu $|x - 1| = 0$ şi $|x^2 - 1| = 0$ de unde $x = 1$.

c) Expresia este $E(x) = 4x^2 + 4x + 5 = 4x^2 + 4x + 1 + 4 = (2x + 1)^2 + 4$ iar $E(x) \geq 4$, egalitatea are loc pentru $x = -\frac{1}{2}$. Valoarea minimă este 4.

15. a) Vezi **figura 1.**

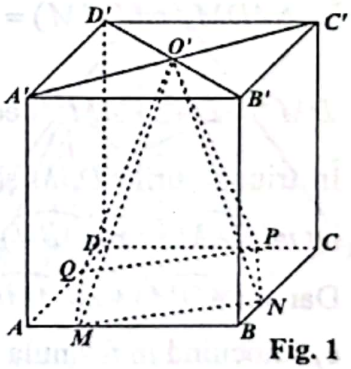


Fig. 1

b) Triunghiul $A'BD$ este echilateral (laturile sunt diagonale in feţele cubului) cu $BD = A'D = A'B = 6\sqrt{2}$ şi atunci distanţa cerută este $d(A', BD) = \frac{BD\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$.

c) Din congruenţele $[AM] = [BN] = [CP] = [DQ] = 2$ cm **(fig. 1)**, $[QA] = [MB] = [NC] = [PD] = 4$ cm şi $\widehat{QAM} \equiv \widehat{MBN} \equiv \widehat{NCP} \equiv \widehat{PDQ}$ rezultă conform cazului L.U.L. că $\Delta QAM \equiv \Delta MBN \equiv \Delta NCP \equiv \Delta PDQ$ şi apoi congruenţa segmentelor $[MN] \equiv [NP] \equiv [PQ] \equiv [QM]$ (1). Din congruenţele $\widehat{AQM} \equiv \widehat{BMN} \equiv \widehat{CNP} \equiv \widehat{DPQ}$ şi $\widehat{QMA} \equiv \widehat{MNB} \equiv \widehat{NPC} \equiv \widehat{PQD}$ şi ţinând cont de faptul că $m(\widehat{AQM}) + m(\widehat{QMA}) = 90^0$ rezultă că $m(\widehat{QMA}) + m(\widehat{NMB}) = 90^0$ şi $m(\widehat{QMN}) = 90^0$ **(2)**. Ţinând seama de **(1)** şi **(2)** obţinem că patrulaterul $MNPQ$ este pătrat.

d) Distanţa $d(O', MNPQ) = d(O', ABCD) = AA' = 6$ cm, iar în triunghiul QAM

Scanned with OKEN Scanner

$m(\sphericalangle A)=90^0$ şi $QM=\sqrt{QA^2+AM^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$ cm. Volumul cubului $V_{cub}=216\ \text{cm}^3$ iar $V_{O'MNPQ}=\dfrac{A_{MNPQ}\cdot d(O',MNP)}{3}=\dfrac{QM^2\cdot AA'}{3}=\dfrac{20\cdot 6}{3}=40\ \text{cm}^3$. $\dfrac{V_{cub}}{V_{piramida}}=\dfrac{216}{40}=\dfrac{27}{5}$.

VARIANTA 67

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
25	30	-1	16	30	180	288	84	C	B	D	B

III. 13. a) $12=2^2\cdot 3$, $15=3\cdot 5$, $18=2\cdot 3^2$ şi atunci $[12,\ 15,\ 18]=2^2\cdot 3^2\cdot 5=180$.

b) $n=12c_1+6$, $n=15c_2+9$, $n=18c_3+13$. Constatăm că diferenţa dintre împărţitor şi rest este aceeaşi adică 6. $n+6=12(c_1+1)=15(c_2+1)=18(c_3+1)$ iar numărul n+6 se divide la 12, la 15 şi la 18 şi rezultă aşadar că $n+6\vdots[12,\ 15,\ 18]$. Condiţia ca n să fie minim şi $180/n+6$ implică $n=174$.

14. a) $m=2$, $2x^2+3x+1=0$, $\Delta=3^2-4\cdot 2\cdot 1=1\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-3\pm 1}{4}\Rightarrow x_1=-1,\ x_2=-\dfrac{1}{2}$.

b) Dacă $x=3$ soluţie, atunci $9m+3(2m-1)+m-1=0\Rightarrow 16m-4=0\Rightarrow m=\dfrac{1}{4}$.

c) $\Delta=(2m-1)^2-4\cdot m(m-1)=4m^2-4m+1-4m^2+4m=1$. Aplicând formula obţinem $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(2m-1)\pm 1}{2m}$, $x_1=-1$, $x_2=\dfrac{1-m}{m}$. Pentru orice m număr real nenul ecuaţia are rădacina întreagă -1.

15. a) Vezi **figura 1**.

b) $DM=2\sqrt{5}\ cm$. Notăm l latura pătratului.

În ΔADM, $m(\widehat{DAM})=90^\circ$, $DA=l$, $AM=\dfrac{l}{2}$, şi atunci

$DM^2=DA^2+AM^2$ deci $20=l^2+\dfrac{l^2}{4}$ iar $l=4$ cm **(fig. 1)**.

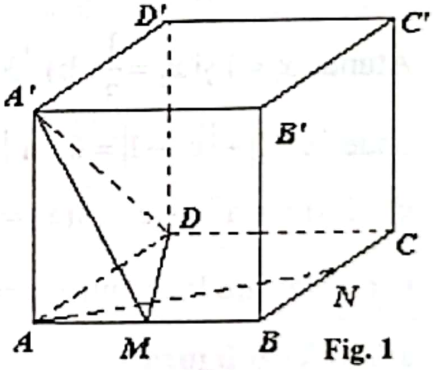


Fig. 1

În triunghiurile DAM şi ΔABN avem congruenţele $DA=AB=4$ cm şi $AM=BN=2$ cm iar $m(\widehat{DAM})=m(\widehat{ABN})=90^\circ$ de unde avem $\Delta DAM\equiv\Delta ABN\Rightarrow m(\widehat{ADM})=m(\widehat{BAN})$.

Dar $m(\widehat{ADM})+m(\widehat{AMD})=90^\circ\Rightarrow m(\widehat{BAN})+m(\widehat{AMD})=90^\circ\Rightarrow AN\perp DM$.

c) Înlocuind în formula $A_{l\ cub}=6l^2=96\ \text{cm}^2$.

d) $\Delta A'AM\equiv\Delta DAM\ (C.C.)\Rightarrow A'M=DM=2\sqrt{5}$ cm.

$A'D$ fiind diagonală a unei feţe a cubului atunci $A'D=4\sqrt{2}$.

Fie $MP\perp A'D$, $P\in[A'D]$ şi atunci P este mijlocul laturii $[A'D]$ **(fig. 2)**Conform Teoremei lui Pitagora aplicată în triunghiul $MA'P$ avem $MP=\sqrt{A'M^2-A'P^2}=2\sqrt{3}$, $a=\dfrac{A'D\cdot MP}{2}=4\sqrt{6}$ cm;

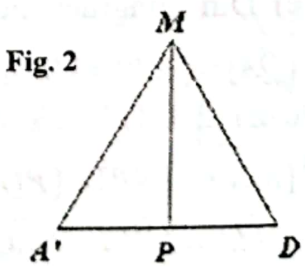


Fig. 2

Cum $81<96=\left(4\sqrt{6}\right)^2<100$, obţinem aşadar că $a\in(9;10)$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 68

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	40	4	$\frac{3}{5}$	6	20	96	$10\sqrt{3}$	A	D	B	C

III. 13. Fie x şi y numărul de elevi, respectiv numărul de bănci. Dacă ar mai fi 5 elevi s-ar ocupa toate băncile cu cate doi elevi, deci $x+5=2y$. Dacă ar fi 18 elevi în plus, s-ar ocupa toate băncile cu cate 3 elevi, $x+18=3y$. $\begin{cases} x+5=2y \\ x+18=3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=13 \\ x=21 \end{cases}$.

a) În clasă sunt 13 bănci; **b)** În clasă sunt 21 elevi.

14. a) $(x^2+4x+3)(x-1)=(x^2+x+3x+3)(x-1)=[x(x+1)+3(x+1)](x-1)=$

$=(x+1)(x+3)(x-1)=(x+1)(x^2-x+3x-3)=(x+1)(x^2+2x-3)$.

b) Folosind descompunerile obţinute la punctul **a)**

$$F(x)=\left[\frac{(x+1)(x+3)}{(x+3)(x-1)}-\frac{2}{x+1}-\frac{7}{(x-1)(x+1)}\right]\cdot(x^2-1)=\frac{(x+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)}-\frac{2(x-1)(x+1)}{(x+1)}-7=$$

$=(x+1)^2-2(x-1)-7=x^2+2x+1-2x+2-7=x^2-4=(x-2)(x+2)$.

c) Dacă $F(a)=a-2$ atunci $(a+2)(a-2)=a-2\Leftrightarrow(a+2)(a-2)-(a-2)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(a-2)(a+2-1)\Leftrightarrow(a-2)(a+1)=0\Rightarrow a-2=0$ sau $a+1=0\Rightarrow a=2$ sau $a=-1$.

Cum F nu are sens pentru -3, 1, -1, atunci numărul real pentru care $F(a)=a-2$ este 2.

15. a) Vezi **figura 1.**

b) Fie $C'X\perp AC$, $X\in AC$. Cum $ACC'A'$ trapez isoscel $XC=\frac{AC-A'C'}{2}=\frac{3}{2}$ cm.

$AX=AC-AX=6-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$ cm. În $\Delta AXC'$,

$C'X=\sqrt{C'A^2-AX^2}$ (Pitagora) şi $C'X=\sqrt{37-\frac{81}{4}}=\frac{\sqrt{67}}{2}$ cm.

În $\Delta CXC'$ dreptunghic, $CC'=\sqrt{C'X^2+XC^2}$ (Pitagora) iar $C'C=\sqrt{\frac{67}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{19}$ cm. Fie O şi O' centrele bazelor trunchiului (**fig. 1**). $OC=\frac{2}{3}\cdot\frac{6\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ cm, $O'C'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ cm,

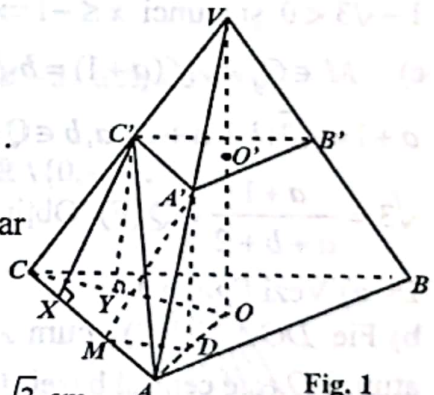


Fig. 1

$CC'=\sqrt{19}$ cm. Fie $C'Y\perp OC$, $Y\in OC$. În $\Delta C'YC$ avem $YC=OC-O'C'=\sqrt{3}$ cm şi $C'Y=\sqrt{C'C^2-YC^2}=\sqrt{19-3}=4=O'O$.

c) Din asemănarea $\Delta VO'A'\sim\Delta VOA$ rezultă că $\frac{VO'}{VO}=\frac{VA'}{VA}=\frac{A'O'}{AO}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{1}{2}$; $\frac{VO'}{VO}=\frac{1}{2}$; $OO'=4$ cm

iar $VO=8$ cm. Raportul volumelor este $V_{ABCD}=\frac{A_{ABC}\cdot VO}{3}=\frac{\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}\cdot VO}{3}=\frac{\frac{36\sqrt{3}}{4}\cdot 8}{3}=24\sqrt{3}$ cm^3.

Scanned with OKEN Scanner

d) Notăm cu A' mijlocul muchiei VA şi punctul D mijlocul segmentului $[AO]$. In $\triangle AOC$, MD este linie mijlocie $MD \| CO$ dar $CO \perp AB$ şi atunci $MD \perp AB$.

Din $A'D \perp (ABC) \Rightarrow A'D \perp AB$ $\left.\begin{matrix} AB \perp MD \\ AB \perp A'D \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (A'DM)$.

VARIANTA 69

I-II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	2	9	6	23	10	36	$9\sqrt{3}$	C	A	B	B

III. 13. a) $m = \dfrac{2\cdot 10+3\cdot 11+4\cdot 12+2\cdot 13+1\cdot 14}{12} = \dfrac{141}{12} = 11\dfrac{3}{4}$ ani (11 ani şi 9 luni).

b) Pentru ca media echipei să fie de 12 ani suma vârstelor elevilor trebuie să fie 144 ani. Dacă aducem un elev de 13 ani atunci ar trebui eliminat unul de 12 ani si media de vârstă a echipei va fi de 12 ani. Dacă aducem 2 elevi de 13 ani atunci ar trebui eliminaţi 2 elevi cu suma vârstelor 25 de ani (de exemplu cel de 14 ani si unul de 11 ani). Dacă aducem 3 elevi de 13 ani ar trebui eliminaţi 3 elevi cu suma vârstelor 38 de ani (de exemplu 2 de 12 ani si cel de 14 ani). Dacă am aduce 4 elevi ar trebui eliminaţi alţi 4 cu vârstele 10,11,12,14, cu suma vârstelor 51 de ani, imposibil, maximul sumei fiind 50. Acelaşi lucru se va întampla dacă încercăm să aducem mai mulţi.

Răspuns: Putem aduce 1,2 sau 3 elevi de 13 ani.

14. a) $f(-1) = (1-\sqrt{3})(-1) - \sqrt{3} = -1+\sqrt{3}-\sqrt{3} = -1$.

b) $f(x)+1 \geq 0 \Leftrightarrow (1-\sqrt{3})x - \sqrt{3} + 1 \geq 0$. $(1-\sqrt{3})x \geq \sqrt{3}-1 /:(1-\sqrt{3})$, observăm că $1-\sqrt{3} < 0$ şi atunci $x \leq -1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1]$.

c) $M \in G_f \Leftrightarrow f(a+1) = b\sqrt{3}$; $(1-\sqrt{3})(a+1) - \sqrt{3} = b\sqrt{3}$.

$a+1 = \sqrt{3}(b+a+2); a,b \in \mathbb{Q}$. Daca $a+b+2 \neq 0$ am obţine $\sqrt{3} = \dfrac{a+1}{a+b+2} \in \mathbb{Q}$ (F) Obţinem $\begin{cases} b+a+2=0 \\ a+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$.

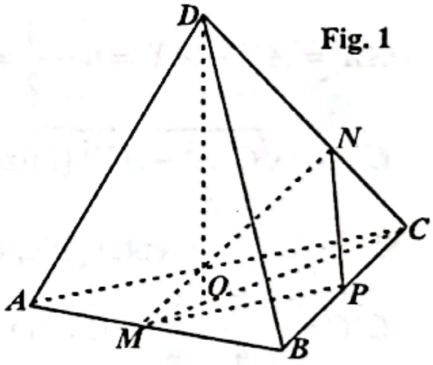


Fig. 1

15. a) Vezi **figura 1.**

b) Fie $DO \perp (ABC)$, cum $ABCD$ este piramidă regulată atunci O este centrul bazei ABC, de latură l.

Aşadar $OC = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{l\sqrt{3}}{3} = \dfrac{l\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ cm. Conform **T. lui Pitagora** ΔDOC, $DO = \sqrt{DC^2 - OC^2}$ avem că $DO = \dfrac{l\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6}$ cm.

Înlocuind în formula volumului $V_{ABCD} = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{l\sqrt{6}}{3}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{6^3\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$ cm^3.

c) Triunghiurile ACD şi DBC fiind echilaterale (**fig. 1**) atunci avem că $AN \perp CD$,

Scanned with OKEN Scanner

$BN \perp CD$ şi rezultă că $CN \perp (ABN)$. Deci $d\big(C,(ABN)\big) = CN = \dfrac{CD}{2} = 3$ cm.

d) Fie P mijlocul laturii AC şi atunci $MP \parallel AC$, $NP \parallel BD$, $MP = NP = 3$ cm.

$\sphericalangle(MN, AC) = \sphericalangle(MN, MP) = \sphericalangle NMP$. $\left.\begin{matrix} AC \perp BO \\ AC \perp DO \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp (OBD) \Rightarrow AC \perp BD$

$\left.\begin{matrix} MP \parallel AC \\ NP \parallel BD \\ AC \perp BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow MP \perp NP \Rightarrow \triangle MNP$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow m(\widehat{NMP}) = 45^0$.

Observatie! Se poate arăta că triunghiul MNP este dreptunghic folosind reciproca **teoremei lui Pitagora,** calculând în prealabil MN din MCN.

VARIANTA 70

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
43	4	74	50	7	16	5	64	C	B	D	B

III. 13. a) Făcând împărţirea $3,(759) = 3,759759759...$ deci a 8-a zecimală este 5.

b) Observăm că zecimalele se repetă în mod periodic din trei în trei poziţii. Cum 2007 este multiplul lui 3, a 2007-a zecimală este ultima cifră din perioadă, adică 9.

14. a) Ecuaţia se mai scrie $x^2 + 4x - 12 = 0$ şi este de gradul doi cu $\Delta = 4^2 - 4(-12) = 64$

$x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm 8}{2}$. Mulţimea soluţiilor este $S = \{-6, 2\}$.

b) Aducem la acelaşi numitor şi $E(a) = \dfrac{a^2 - 9}{9a^3} \cdot 9a^4 = a(a-3)(a+3) \in \mathbb{Z}$, cu $a \in \mathbb{Z}$.

c) $F(x) = \dfrac{x^2 - 9}{9x^3} \cdot \dfrac{9x^4}{x(x^2 + 6x + 9)} = \dfrac{(x-3)(x+3)x}{x(x+3)} = \dfrac{x-3}{x+3}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}$.

15. a) Vezi **figura 1.**

b) Notăm cu l latura hexagonului (**fig. 1**) $A_l = \dfrac{P_b \cdot a_p}{2}$ şi

înlocuind $48\sqrt{3} = \dfrac{6 \cdot l \cdot 4\sqrt{3}}{2}$ şi atunci AB=4 cm.

c) $A_b = 6\dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$ cm^2. Aplicăm **teorema lui Pitagora** în ΔVOM şi $VO = \sqrt{VM^2 - OM^2} = \sqrt{48 - 12} = 6$ cm.

$V = \dfrac{24\sqrt{3} \cdot 6}{3} = 48\sqrt{3}$ cm^3.

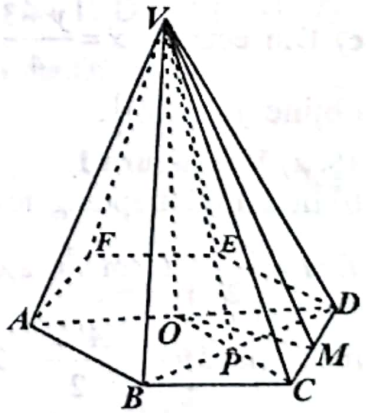


Fig. 1

Scanned with OKEN Scanner

d) BD este dreapta comună a planelor (VBD) si (BCD). OC şi BD, diagonalele rombului $BODC$, deci $OC \perp BD$ in planul bazei şi $VP \perp BD$ în planul (VBD), ($[VP]$ mediană şi înălţime in $\triangle VBD$ isoscel). Unghiul celor două plane este unghiul dreptelor OC şi VP. Unghiul ascuţit căutat este $\sphericalangle VPO$ (vezi **figura 2**) În ΔVOP: $\sin(\sphericalangle VPO) = \frac{VO}{VP}$.

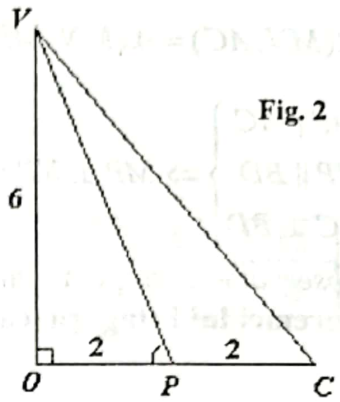


Fig. 2

Conform **T. lui Pitagora:** $VP = \sqrt{VO^2 + OP^2} = 2\sqrt{10}$ cm., deoarece $OP = \frac{OC}{2} = 2$ cm şi atunci obţinem valoarea $\sin(\sphericalangle VPO) = \frac{6}{2\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

VARIANTA 71

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
24	2·5	3	$\frac{4}{3}$	80	12	120	25	A	C	A	D

III. 13. Conform teoremei împărţirii cu rest, obţinem sistemul de ecuaţii:

$\left.\begin{array}{l} 123 = x \cdot a + 3, x > 3 \\ 87 = x \cdot b + 7, x > 7 \\ 62 = x \cdot c + 2, x > 2 \end{array}\right\}$ de unde $\left.\begin{array}{l} 120 = x \cdot a \\ 80 = x \cdot b \\ 60 = x \cdot c \end{array}\right\}$, avem $x/(120,80,60)$ .Deoarece (120,80,60)=20 avem ca $x/20$ şi $x > 7$. **a)** Cel mai mare număr ce îndeplineşte condiţiile este 20.

b) Cel mai mic număr ce îndeplineşte condiţiile este 10.

14. a) Înlocuind, obţinem $E(\sqrt{2}-3) = (\sqrt{2}-3)^2 + (\sqrt{2}-3) + 5\sqrt{2}$.

$E(\sqrt{2}-3) = \sqrt{2}^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + 3^2 + \sqrt{2} - 3 + 5\sqrt{2} = 8 - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 8$.

b) Pentru $x = 1$ şi $y = 1$, $4x - y - 3 = 4 \cdot 1 - 1 - 3 = 0$. Deci, (1, 1) este soluţie a ecuaţiei date.

c) Din ecuaţie $x = \frac{y+3}{4}$ şi cum $0 \le x \le 1$, atunci $0 \le \frac{y+3}{4} \le 1$ iar $0 \le y + 3 \le 4$. Se obţine $y \in [-3;1]$.

15. a) Vezi **figura 1**.

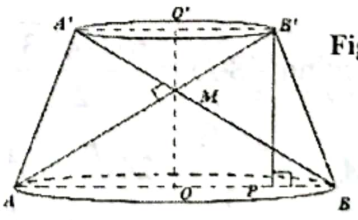


Fig. 1

b) În $\triangle AMB$ dreptunghic (**fig. 1**), MO fiind mediană avem că $OM = \frac{AB}{2} = 6$ cm . În $\triangle A'MB'$ dreptunghic, MO' fiind mediană $MO' = \frac{A'B'}{2} = 2$ cm. Deci $OO' = 8$ cm . Conform **teoremei lui Pitagora** în $\triangle B'PB: B'B^2 = B'P^2 + PB^2$ iar $BB'^2 = 8^2 + 4^2$ de unde $BB' = 4\sqrt{5}$ cm .

Scanned with OKEN Scanner

c) Fie V vârful conului din care provine trunchiul (**figura 2**).

$\triangle VO'B' \sim \triangle VOB (O'B' \| OB,\ T.F.A) \Rightarrow \frac{O'B'}{OB} = \frac{VB'}{VB} = \frac{VO'}{VO}$,

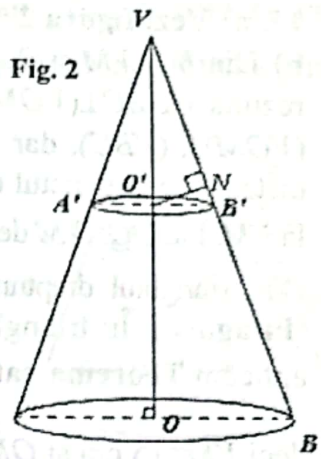


Fig. 2

dar $VO' = VO - OO'$, $\frac{2}{6} = \frac{VO-8}{VO}$. Rezolvând ecuația obținem $VO = 12\ cm$. $V_{con} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3} = \frac{36\pi \cdot 12}{3} = 144\pi\ \text{cm}^3$.

d) Fie $O'N$ distanța de la centrul bazei mici la generatoarea trunchiului de con, $N \in VB$. $\triangle VO'N \sim \triangle VBO$ (cazul u.u.) și atunci $\frac{VO'}{VB} = \frac{O'N}{OB} = \frac{VN}{VO}$, $VB = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5}$ (**T. Pitagora** aplicată în $\triangle VOB$), $VO' = VO - OO' = 4$ cm. Atunci $\frac{4}{6\sqrt{5}} = \frac{O'N}{6} \Rightarrow O'N = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ cm.

Observație! Putem folosi **Teorema a doua a înălțimii** în $\triangle VO'B'$.

VARIANTA 72

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
198	4	3	48	40	$25\sqrt{3}$	12	288	D	C	A	A

III. 13. a) Dacă notăm numerele cu a și b avem $(a,b) = 13$ și $a^2 - b^2 = 1183$ (unde (a,b) = c.m.m.d.c. al numerelor a și b. Rezultă $a = 13 \cdot x$ și $b = 13 \cdot y$, unde $(x,y) = 1$. Înlocuind obținem $169(x^2 - y^2) = 1183$ implică $x^2 - y^2 = 7$ deci $(x-y)(x+y) = 7$ și cum x și y sunt numere naturale prime între ele obținem $x - y = 1$ și $x + y = 7$ de unde $x = 4$ și $y = 3$, deci $a = 52$ și $b = 39$.

b) $p = \frac{39}{59} \cdot 100 = 75\%$.

14. a) Din $M(1,0) \in G_f$ obțin $f(1) = 0$ dar $f(1) = a - 1 + b$, deci $a + b = 1$. Din $N(0,3) \in G_f$ obțin $f(0) = 3$, dar $f(0) = b$, deci $b = 3$, iar din $a + b = 1$ și $b = 3$ rezultă $a = -2$.

b) $f(x) = -3x + 3$ (**fig. 1**) Graficul funcției este dreapta MN.

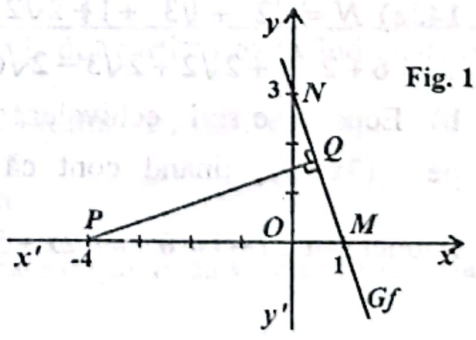


Fig. 1

c) Fie $PQ \perp MN$, $Q \in MN$. Triunghiurile PQM și NOM sunt asemene (*u.u.*), de unde $\frac{PQ}{ON} = \frac{PM}{MN}$; $MN = \sqrt{10}$ (**Pitagora** în triunghiul dreptunghic NOM). Deci $\frac{PQ}{3} = \frac{5}{\sqrt{10}}$, de unde $PQ = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ = distanța de la punctul P la dreapta ce reprezintă graficul funcției.

Scanned with OKEN Scanner

15. a) Vezi **figura 2.**

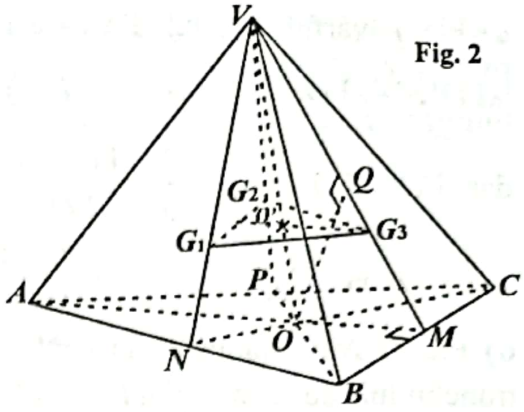


Fig. 2

b) Din $BC\perp VM$ şi $BC\perp OM$ iar VM şi $OM \subset (VOM)$ rezultă că $BC\perp(VOM)$. Cum $BC\subset (VBC)$ implică $(VOM)\perp (VBC)$, dar $(VOM)\cap(VBC)=VM$, de unde distanţa de la punctul O la (VBC) este distanţa de la O la VM. Fie $OQ\perp VM$ deci $OQ=d\left(O,(VBC)\right)=7{,}2$ cm. Din triunghiul dreptunghic VOQ se obţin VQ=9,6cm (**Pitagora**). În triunghiul dreptunghic VOM (**fig. 2**) aplicăm **Teorema catetei** şi obţinem $VO^2=VQ\cdot VM$ deci VM=15 cm şi OM=9 dar $OM=a_3=\dfrac{AB\sqrt{3}}{6}$ deci $AM=18\sqrt{3}$ cm.

c) $\mathcal{A}_l=\dfrac{\mathcal{P}_b\cdot a_p}{2}=\dfrac{3\cdot 18\sqrt{3}\cdot 15}{2}$ de unde $\mathcal{A}_l=405\sqrt{3}$ cm^2.

d) $\mathcal{V}_{[VG_1G_2G_3]}=\dfrac{1}{3}\mathcal{A}_{G_1G_2G_3}\cdot VO'$. Triunghiul $G_1G_2G_3$ este echilateral, $G_1G_2=\dfrac{2}{3}NP=\dfrac{BC}{3}=6\sqrt{3}$ cm iar $\mathcal{A}_{G_1G_2G_3}=\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}=24\sqrt{3}$ cm^2. Din asemănarea triunghiurilor $VO'G_3$ şi VOM (**teorema fundamentală a asemănării**) rezultă că VO'=8 cm, deci $\mathcal{V}_{[VG_1G_2G_3]}=72\sqrt{3}$ cm^3.

VARIANTA 73

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
43	1275	0	40	6	32	36	108	B	C	D	C

13. a) Din descompunerea numerelor în factori primi avem că: $279=3^2\cdot 31$, $372=2^2\cdot 3\cdot 31$ si atunci $(279,372)=3\cdot 31=93$.

b) Fie a şi b cele două numere, $a>b$. Atunci ipoteza se scrie: $\begin{cases}a+b=77\\ a=4\cdot b+2\end{cases}$. Înlocuind pe a, obţinem: $4b+b+2=77\Rightarrow 5b=75$, deci $b=15$, iar $a=77-15\Rightarrow a=62$.

14. a) $N=\sqrt{2}^2+\sqrt{3}^2+1+2\sqrt{2}\sqrt{3}+2\sqrt{2}\cdot 1+2\sqrt{3}\cdot 1-2\sqrt{6}-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$.

$N=6+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}=6$.

b) Ecuatia se scrie echivalent $(3x-1)(x+3)-(1-3x)(x+2)=0$ şi dăm factor comun pe $(3x-1)$, ţinând cont că $1-3x=-(3x-1)$, obţinem: $(3x-1)(x+3+x+2)=0$. Atunci sau $3x-1=0$ sau $2x+5=0$. $S=\left\{\dfrac{1}{3},-\dfrac{5}{2}\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Inecuația se scrie echivalent $2(x+1)-\sqrt{5}(x+1)<0$. Dăm factor comun pe $(x+1)$: $(x+1)(2-\sqrt{5})<0$ deoarece $\sqrt{5}>2$ atunci $2-\sqrt{5}<0$. Împărțind inegalitatea prin $(2-\sqrt{5})$ obținem: $x+1>0\Rightarrow x>-1$. Solutia $S=(-1,+\infty)$.

15. a) Vezi **figura 1.**

b) Fie O și O' centrele bazelor mari, respectiv mici, ale trunchiului. Construim $CM\perp AB, M\in AB$ (vezi **fig. 1**) în ΔCMB cu $m(\sphericalangle M)=90^\circ$, avem: $BC=CD=2r$ și atunci lungimea $MB=OB-O'C=4-r$. Aplicăm **teorema catetei** și atunci $BC^2=BM\cdot AB$; și obținem ecuația $4r^2=(4-r)\cdot 8$, ea fiind de gradul II: $4r^2+8r-32=0$, $S=\{-4,\ 2\}$, $r=2$ cm (soluția pozitivă).

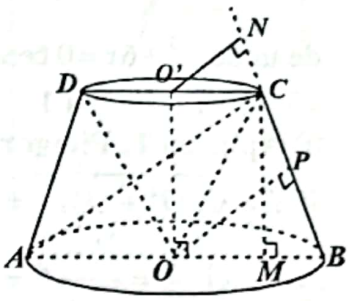


Fig. 1

c) Formula $V_{tr}=\frac{h\pi}{3}\left(R^2+r^2+R\cdot r\right)$. Înălțimea se calculează cu **T. Pitagora** în $\triangle CMB$:

$CM=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ cm. $V_{tr}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}(16+4+8)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\cdot 28=\frac{56\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3.

d) Fie $OP\perp BC$ și $O'N\perp BC$ ($P,\ N\in BC$). Triunghiurile OBP și $O'CN$ sunt asemenea (u.u.) pentru că $\sphericalangle ABC\equiv\sphericalangle DCN$ (corespondente). Cum $AC\perp BC$ și $OP\perp BC$ rezultă că $OP\parallel AC$, dar $(OA)\equiv(OB)$ conduce la faptul că $[OP]$ este linie mijlocie în ΔABC, deci $OP=\frac{AC}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ (AC se determină aplicând teorema lui **Pitagora** în triunghiul dreptunghic ABC). Avem $\Delta BOP\sim\Delta CO'N$, de unde $\frac{O'N}{OP}=\frac{CO'}{BO}$.

Deci $O'N=\frac{CO'\cdot OP}{BO}=\frac{2\cdot 2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$ cm și distanța de la centrul bazei mici a trunchiului de con la dreapta BC este de $\sqrt{3}$ cm.

VARIANTA 74

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	$\frac{10}{13}$	3	260	75	6	8000	256	B	C	C	B

III. 13. Notăm x numărul de rafturi și y numărul de cărți. Rezolvând sistemul $\begin{cases}50x+10=y\\60(x-4)=y\end{cases}$ obținem soluția $x=25$ si $y=1260$. **a)** 25 rafturi; **b)** 1260 de cărți.

14. a) Aducem la același numitor ceea ce ne conduce la

$E(x)=\frac{x^2+2-x^2-2x}{(x+2)^2}\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{x+2-3}$ și prin simplificare obținem ca valoarea expresia

$E(x)=\frac{-2(x-1)}{x+2}\cdot\frac{x-2}{x-1}=\frac{4-2x}{x+2}=\frac{2(2-x)}{x+2}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,\ 2\}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Înlocuind obținem: $E\sqrt{2}\cdot E(-\sqrt{2})=\frac{2(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}+2}\cdot\frac{2(2+\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}}=4$.

c) Rezolvăm ecuația: $\frac{4-2x}{x+2}=x+2,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, drept urmare $x^2+4x+4+2x-4=0$ de unde $x^2+6x=0$ ceea ce se scrie $x(x+6)=0\Rightarrow S=\{-6,\ 0\}$.

15. a) Vezi **figura 1.**

b) Aplicăm **T. Pitagora** în $\triangle VOM$ **(fig. 1)**:

$VM=\sqrt{VO^2+OM^2}=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$ cm .Conform formulei $A_l=\frac{P_b\cdot a_p}{2}=\frac{40\cdot 5\sqrt{5}}{2}=100\sqrt{5}$ cm^2.

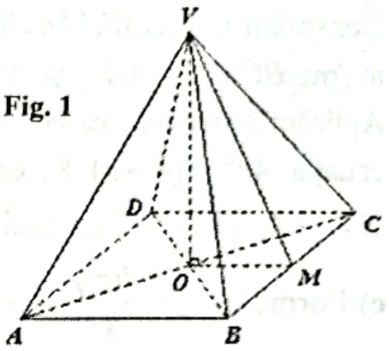


Fig. 1

c) Exprimăm volumul piramidei $VABC$ în două moduri: $\frac{VO\cdot A_{ABC}}{3}=\frac{d(A,\ (VBC))\cdot A_{VBC}}{3}\Rightarrow VO\cdot\frac{AB\cdot BC}{2}=$

$=d(A,\ (VBC))\cdot\frac{VM\cdot BC}{2}$ şi atunci prin înlocuire $d(A,\ (VBC))=4\sqrt{5}$ cm.

d) Fie $AP\perp(VBC)$, $AP=d(A,\ (VBC))=4\sqrt{5}$ cm.

În $\triangle VPA$, $m(\sphericalangle P)=90^\circ$ şi atunci unghiul căutat $\sphericalangle(VA,\ (VBC))=\sphericalangle(VA,\ VP)=\sphericalangle AVP$ (deoarece (VP) este proiecţia muchiei VA pe planul (VBC)).

$\sin(\sphericalangle AVP)=\frac{AP}{AV}=\frac{4\sqrt{5}}{5\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{30}}{15}$. Lungimea VA se calculează folosind **T. lui Pitagora** în $\triangle VMC$. $AV=CV=\sqrt{VM^2+MC^2}=\sqrt{125+25}=\sqrt{150}=5\sqrt{6}$ cm.

VARIANTA 75

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	$\frac{1}{10}$	3	2	40	26	6	258	C	A	D	B

III. 13. Notăm cu a numărul elevilor din clasa A şi cu b numărul elevilor din clasa B. Avem atunci sistemul $\begin{cases}a+b=46\\b-5=a+5-6\end{cases}$ de unde $\begin{cases}a+b=46\\a-b=4\end{cases}$ cu $S=\{21,\ 25\}$.

a) Clasa A are 21 de elevi. b) Clasa B are 25 de elevi.

14. a) Aducem la acelaşi numitor, care este $x(x-4)$:

$E(x)=\frac{x^2+x^2-8x+16-x^2+4x}{x(x-4)}\cdot\frac{2x}{x^2-4x+16}=\frac{x^2-4x+16}{x(x-4)}\cdot\frac{2x}{x^2-4x-16}=\frac{2}{x-4}$

b) Scriem astfel $\frac{2}{x-4}>0$, dacă $(x-4)>0$ de unde $x>4$ cu $x\in(4,+\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

c) $\frac{2}{a-4} \in \mathbb{Z}$, dacă $(a-4)/2$, atunci $(a-4) \in \{-2,-1, 1, 2\}$, obținem $a \in \{2, 3, 5, 6\}$.

15.a) Vezi **figura 1.**

b) Lungimea desfașurării suprafeței laterale coincide cu lungimea bazei, atunci $2\pi R = 6\pi$ deci R=3 cm.

$A_l = 2\pi R(R+G) = 6\pi(3+4) = 42\pi$ cm^2.

c) Teorema lui Pitagora în $\triangle OO'B$ **(fig. 1)** conduce la

$O'B = \sqrt{O'O^2 + OB^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$ cm.

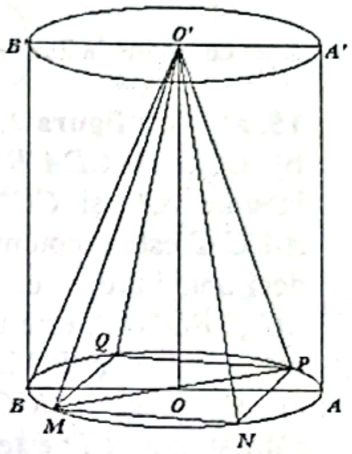


Fig. 1

Exprimăm aria $\triangle AO'B$ în două moduri:

$$\frac{OO' \cdot AB}{2} = \frac{AO' \cdot BO' \cdot \sin(\sphericalangle AO'B)}{2} \Rightarrow \sin(\sphericalangle AO'B) = \frac{24}{25}.$$

d) $MP = AB = 6$ cm (diametre în baza cilindrului).

MP fiind diagonala pătratului $MNPQ \Rightarrow MP = l\sqrt{2}$ cm, unde l este latura pătratului si atunci $l = 3\sqrt{2}$ cm. Înlocuind în formula volumului avem $V_{piramidă} = \frac{(3\sqrt{2})^2 \cdot 4}{3} = 24$ cm^3.

VARIANTA 76

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	b	144	9	6	22	4	144	B	D	C	D

III. 13. a) Dacă în pungă ar fi fost 71 de bomboane şi ar fi fost împărţite în mod egal unui grup de 4 copii, fiecare ar fi primit câte 17 bomboane, iar în pungă ar mai fi rămas 3 bomboane. Dacă cele 71 de bomboane din pungă s–ar fi împărţit în mod egal unui grup de 6 copii, fiecare copil ar fi primit câte 11 bomboane, iar în pungă ar mai fi rămas 5 bomboane. Deci, în pungă puteau fi 71 de bomboane.

b) Fie n cel mai mic număr de bomboane din pungă. Aplicând teorema împărţirii cu rest obţinem $n = 4a + 3$ şi $n = 6b + 5$, cu a şi b câturi nenule. Observăm că diferenţa dintre împărţitor şi rest este în ambele cazuri 1. Adunând această diferenţă în ambii membri ai egalităţilor anterioare, obţinem că $n + 1 = 4a + 4 = 4(a + 1)$ = multiplu de 4 şi că $n + 1 = 6b + 6 = 6(b + 1)$ multiplu de 6, de unde deducem că $n + 1$ este multiplu comun al numerelor 4 şi 6. Cum n este cel mai mic număr de bomboane din pungă, rezultă că $n + 1$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor 6 şi 4, adică 12. Deci, $n = 11$.

14. a) Cum $f(x) = 2mx + m - 2$, pentru $m = 1$, obţinem $f(x) = 2x - 1$. Deoarece reprezentarea geometrică a graficului acestei funcţii este o dreaptă, avem nevoie de coordonatele a două dintre punctele de pe grafic, de exemplu, A(1, 1) şi B(2, 3). Trasăm dreapta AB într – un sistem de axe perpendiculare **(fig.1)** :

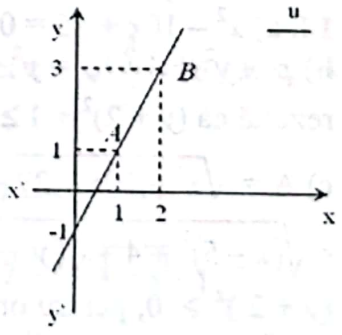


Fig. 1

b) Abscisa punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor obţinute rezultă ca soluţie a ecuaţiei $g(x) = h(x)$, adică $4x = -4x - 4$. Obţinem $x = -\frac{1}{2}$ şi $y = -2$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Pentru $f(x)=2mx+m-2$, punctul $P\left(-\frac{1}{2};-2\right)$ aparţine graficului funcţiei f dacă $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$, ceea ce revine la $2m\left(-\frac{1}{2}\right)+m-2=-2$, relaţie adevărată pentru orice număr real m.

15. a) Vezi **figura 2.**

b) Cum $ABCDA'B'C'D'$ este cub (**fig. 2**), muchiile laterale AA' şi CC' sunt paralele şi congruente, deci $AA'C'C$ este dreptunghi, de unde rezultă că $A'C' \parallel AC$, deci unghiul dreptelor $A'C'$ şi BD este unghiul format de AC şi BD, care este un unghi drept, deoarece $ABCD$ este pătrat, iar AC şi BD îi sunt diagonale.

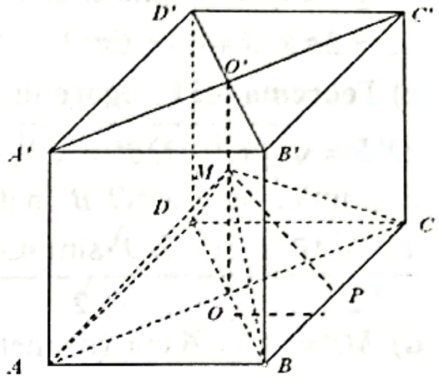


Fig. 2

c) Deoarece $AA'CC'$ este dreptunghi, iar centrul O al pătratului $ABCD$ este mijlocul diagonalei $[AC]$ şi centrul O' al pătratului $A'B'C'D'$ este mijlocul diagonalei $[A'C']$, rezultă că segmentele $[A'O']$ şi $[AO]$ sunt paralele şi congruente, de unde obţinem că $AOO'A'$ este paralelogram. Cum $AA' \perp (ABC)$, rezultă că $OO' \perp (ABC)$ în O. Deoarece $MABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu baza pătratul $ABCD$ de centru O, rezultă că şi $MO \perp (ABC)$ în O. Dar, perpendiculara pe un plan într-un punct al său este unică, de unde deducem că dreptele $O'O$ şi MO coincid, deci punctele O, M şi O' sunt coliniare.

d) Fie P mijlocul laturii $[BC]$. Cum piramida $MABCD$ este regulată, triunghiul MBC este isoscel, deci $MP \perp BC$ este apotema piramidei. Din triunghiul dreptunghic MOP, aplicând teorema lui **Pitagora** obţinem, pentru $MP = AB = 6$ cm că $OM^2 = MP^2 - OP^2 = 36 - 9 = 27$, de unde $OM = 3\sqrt{3}$ cm.

VARIANTA 77

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
47	100	50	20	70	12	288	96	A	B	C	D

III. 13. a) $n = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b = 111a + 111b + 111c = 111 \cdot (a+b+c)$.

b) Cum $n = 999$, rezultă că $111(a + b + c) = 999$, de unde $a + b + c = 9$. Dar a, b, c fiind consecutive, avem $a + b + c = a + a + 1 + a + 2 = 9$, de unde $3a = 6$, deci: $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.

14. a) $x^2 - 10x + 25 = 0$ implică $(x - 5)^2 = 0$, de unde $x - 5 = 0$, adică $x = 5$.

b) $p = y^2 + 4y + 5 = y^2 + 4y + 4 + 1 = (y + 2)^2 + 1$. Cum $(y + 2)^2 \geq 0$, oricare ar fi $y \in \mathbf{R}$, rezultă că $(y + 2)^2 + 1 \geq 1, (\forall) y \in \mathbf{R}$, deci $(y + 2)^2 + 1 > 0$, pentru orice y real.

c) $A = \sqrt{x^2 - 10x + 29} + \sqrt{y^2 + 4y + 5} = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 4} + \sqrt{y^2 + 4y + 4 + 1} = \sqrt{(x-5)^2 + 4} + \sqrt{(y+2)^2 + 1} \geq \sqrt{4} + \sqrt{1}$, căci $(x - 5)^2 \geq 0$ şi $(y + 2)^2 \geq 0$, pentru orice x şi y numere reale. Deci, $A \geq 3$ oricare ar fi numerele reale x şi y şi îşi atinge valoarea minimă 3 când $x = 5$ şi $y = -2$.

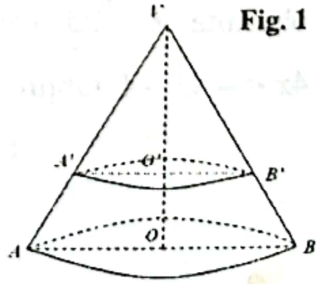


Fig. 1

Scanned with OKEN Scanner

15. a) Vezi **figura 2.**

b) Fie $\Delta\, VAB$ secţiunea axială a conului (**fig. 1**).

$\mathcal{P}_{\Delta VAB} = 2G + 2R = 18$ cm, de unde $R + G = 9$ cm. Cum $2R = 8$ cm, rezultă că $R = 4$ cm şi $G = 5$cm. Aria totală a conului este $\pi R \cdot (R+G) = \pi \cdot 4 \cdot (4+5) = 36\pi\,\text{cm}^2$.

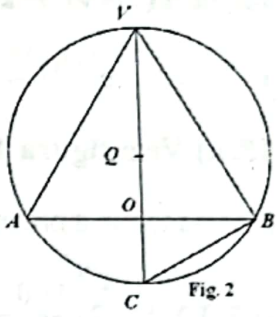


Fig. 2

c) Considerăm cercul circumscris triunghiului VAB isoscel cu vârful în V. Cum înălţimea VO este şi mediatoarea bazei, rezultă că centrul Q al cercului circumscris (**fig.2**) acestui triunghi se află pe VO. Fie C punctul în care VO intersectează a doua oară cercul. Triunghiul VBC este dreptunghic, căci unghiul VBC, înscris în semicerc, este drept. Cum $VB^2 = VC \cdot VO$ (**teorema catetei**), rezultă $VC = \frac{25}{3}$, înălţimea conului VO fiind obţinută din triunghiul VOB cu teorema lui **Pitagora**: $VO^2 = VB^2 - OB^2 = 25 - 16 = 9$, $VO = 3$ cm.

Cum CV este diametru, raza cercului circumscris ΔVAB este $VQ = \frac{1}{2}VC = \frac{25}{6}$ cm.

d) Fie O' centrul cercului de secţiune şi $r = VO'$ raza sa. Cum $\frac{VO'}{VO} = \frac{2}{3}$, rezultă că $VO' = \frac{2}{3}\cdot 3 = 2$ cm şi $r = \frac{2}{3}R = \frac{8}{3}$ cm, iar înălţimea trunchiului de con obţinut este $OO' = VO - VO' = 3 - 2 = 1$ cm. Aplicând formula pentru volumul trunchiului de con $\frac{\pi \cdot OO'}{3}\cdot\left(R^2 + r^2 + R\cdot r\right)$, ne dă $\frac{\pi\cdot 1}{3}\left(^{9)}16 + \frac{64}{9} + {}^{3)}\frac{32}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{144+64+96}{9}\right) = \frac{304\cdot\pi}{27}\,\text{cm}^3$.

VARIANTA 78

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
99	104	20	8	18	30	60	175	D	B	D	A

III. 13. a) Fie x numărul exerciţiilor rezolvate de Ana. Cum Ana a rezolvat cu 6 exerciţii mai mult decât Dan şi cu 8 mai puţine ca Tudor, rezultă că Dan a rezolvat $x - 6$ exerciţii, iar Tudor, $x + 8$. Diferenţa dintre numărul exerciţiilor rezolvate de Tudor şi cele rezolvate de Dan este $(x + 8) - (x - 6) = 14$ exerciţii.

b) Cum Dan a rezolvat $x - 6$ exerciţii, număr ce reprezintă $\frac{5}{8}$ din numărul de exerciţii rezolvate de Ana, adică x, obţinem ecuaţia: $x - 6 = \frac{5}{8}\cdot x$, de unde $\frac{3}{8}\cdot x = 6$, deci $x = 6\cdot\frac{8}{3} = 16$, adică Ana a rezolvat 16 exerciţii.

14. a) $x \cdot y = \sqrt{4-\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{7}} = \sqrt{\left(4-\sqrt{7}\right)\left(4+\sqrt{7}\right)} = \sqrt{16-7} = \sqrt{9} = 3$.

b) $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = \left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{4-\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{7}} + \left(\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2 =$

$= \left|4-\sqrt{7}\right| - 2\sqrt{\left(4-\sqrt{7}\right)\left(4+\sqrt{7}\right)} + \left|4+\sqrt{7}\right| = 4 - \sqrt{7} - 2\sqrt{4^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2} + 4 + \sqrt{7} = 8 - 2\cdot 3 = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Cum $(x-y)^2=2$, rezultă $|x-y|=\sqrt{2}$. Dar, $\sqrt{4-\sqrt{7}}<\sqrt{4+\sqrt{7}}$, deci $x<y$, de unde $x-y<0$, deci $|x-y|=-x+y=\sqrt{2}$. Deci $x-y=-\sqrt{2}$. Atunci, $\frac{x-y}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1\in\mathbb{Z}_-$.

15. a) Vezi **figura 1**.

b) Aria totală a prismei = aria laterală + de două ori aria bazei $=3\cdot AB\cdot BB'+2\cdot\frac{AB^2\cdot\sqrt{3}}{4}=$

$=3\cdot 10\cdot 5+2\cdot\frac{100\cdot\sqrt{3}}{4}=150+50\sqrt{3}=50\left(3+\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$.

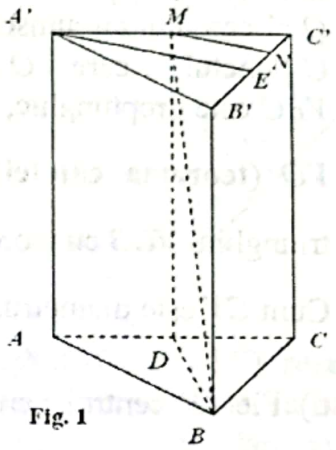


Fig. 1

c) Fie D mijlocul laturii $[AC]$ (**fig. 1**). Cum $A'M=5\text{ cm}=\frac{1}{2}$ din $C'A'$, rezultă că M este mijlocul lui $C'A'$, deci $MA'\|AD, [MA']\equiv[AD]$ de unde rezultă $A'MDC$ paralelogram, şi deci $AA'\|MD$.
Deci, unghiul dintre dreptele AA' şi MB este unghiul dreptelor MD şi MB, adică $\sphericalangle DMB$. Din triunghiul MDB dreptunghic în D, avem

$\text{tg}(\sphericalangle DMB)=\frac{DB}{MD}=\frac{AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{AA'}=\frac{10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{5}=\frac{5\sqrt{3}}{5}=\sqrt{3}=tg60^\circ$. Deci, $m(\sphericalangle DMB)=60^\circ$.

d) Cum $BB'\perp(A'B'C'), BB'\subset(B'BC)$, avem $(B'BC)\perp(A'B'C')$. Fie $MN\perp B'C', N\in B'C'$. Rezultă că distanța de la punctul M la planul $(B'BC)$ este lungimea segmentului $[MN]$.
Fie $A'E\perp[B'C'], cu\ E\in[B'C']$. În triunghiul echilateral $A'B'C'$, $[A'E]$ este înălțime, deci $A'E=5\sqrt{3}$ cm. Din $MN\perp B'C'$ şi $A'E\perp B'C'$ rezultă $A'E\|MN$ şi, cum M era mijlocul laturii $[C'A']$, avem $MN=\frac{1}{2}\cdot A'E=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.(**teorema reciprocă a liniei mijlocii**).

VARIANTA 79

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	50	9	5	48	$6\sqrt{2}$	100	64	B	D	D	C

III. 13. a) Fie b şi g numărul biologlor, respectiv, al geologilor de pe insulă. Cum $g=2b$ şi $g-20=b+18$, înlocuind, obținem $2b-20=b+18$, de unde $b=38$ şi $g=76$. La începutul expediției, pe insulă au fost 38 de biologi.
b) În a doua săptămână, pe insulă erau $76-20=56$ geologi şi $38+18=56$ biologi, în total, $2\cdot 56=112$ specialişti.
14. a) Dacă punctul $A(a;\ 0)$ se află pe graficul funcției, rezultă $f(a)=0$. Cum $f(a)=(2a+3)\cdot a+1$, obținem ecuația $2a^2+3a+1=0$, echivalentă cu $2a^2+2a+a+1=0$, adică $2a(a+1)+(a+1)=0$, deci $(a+1)(2a+1)=0$, care are soluțiile -1 şi $-\frac{1}{2}$ (sau, puteam folosi discriminantul $\Delta=1$ şi formula pentru aflarea rădăcinilor ecuației de gradul al doilea).

Scanned with OKEN Scanner

b) Pentru $a = -1$, funcția f devine: $f(x) = \left[2\cdot(-1)+3\right]\cdot x+1 = x+1$. Determinăm cordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției cu axele de coordonate: pentru $x = 0, f(0) = 1$; fie B(0;1) și, pentru $f(x) = 0$, deducem că $x = -1$; fie A(-1;0). Reprezentarea geometrică a graficului funcției f este dreapta AB (**fig. 1**).

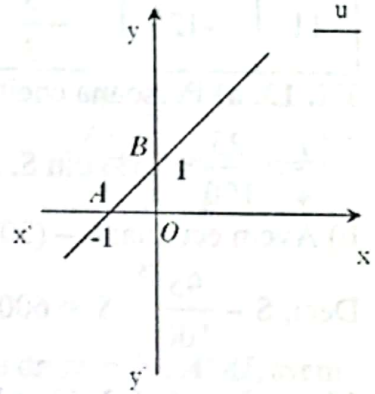


Fig. 1

c) Pentru $a = -1, f(x) = x+1$.

Rezultă că $N = f(n)\cdot f(n+2)+1 = (n+1)\cdot(n+2+1)+1 =$

$= (n+1)(n+3)+1 = n^2+3n+n+3+1 = n^2+4n+4 = (n+2)^2$.

Cum $n \in \mathbf{N}$, rezultă că $(n+2)^2 = N$ este pătrat perfect.

15. a) Vezi **figura 2**.

b) Cum fețele cubului (**fig. 2**) sunt pătrate de latură $l = 6$ cm, diagonalele lor sunt congruente, toate având lungimea egală cu $l\cdot\sqrt{2} = 6cm\cdot\sqrt{2}$. Deci, $AC = AD' = D'C = 6\sqrt{2}$ cm.

Triunghiul ACD' este echilateral, având perimetrul egal cu $3\cdot 6\sqrt{2}\text{ cm} = 18\sqrt{2}\text{ cm}$.

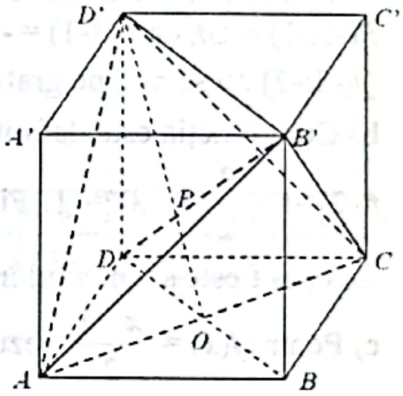


Fig. 2

c) Deoarece punctele necoplanare A, C, B', D', determină un tetraedru, observăm că muchiile sale reprezintă câte o diagonală a celor șase fețe ale cubului, deci: $AB' = B'C = CD' = D'A = AC = CB' = 6\sqrt{2}$ cm, prin urmare piramida triunghiulară $ACB'D'$ este un tetraedru regulat. Aria sa totală va fi de patru ori aria unei fețe, adică de patru ori aria triunghiului echilateral ACD', deci $4\cdot\dfrac{AC^2\cdot\sqrt{3}}{4} = AC^2\cdot\sqrt{3} = \left(6\cdot\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{3} = 72\sqrt{3}$ cm^2.

d) Arătăm că dreapta $B'D$ este perpendiculară pe două drepte concurente din planul $(D'AC)$. Cum $B'D \subset (BDD')$, iar $AC \perp BD, AC \perp DD'$, avem $AC \perp (BDD')$ deci $AC \perp B'D$ **(1)**. Fie O centrul bazei $ABCD$ și $[B'D]\cap[D'O] = \{P\}$. Cum $DO \parallel D'B'$, avem $\Delta D'PB' \sim \Delta OPD$ (**teorema fundamentală a asemănării**), de unde $\dfrac{DO}{D'B'} = \dfrac{DP}{PB'} = \dfrac{OP}{PD'} = \dfrac{1}{2}$. Scriind proporții derivate, obținem $\dfrac{DP}{DB'} = \dfrac{1}{3}$, de unde $DP = \dfrac{1}{3}\cdot AB\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm. Din triunghiul $D'DO$ dreptunghic rezultă $D'O^2 = D'D^2 + DO^2 = 6^2 + \left(3\cdot\sqrt{2}\right)^2 = 36 + 18 = 54$ (**Pitagora**), de unde $D'O = 3\sqrt{6}$ cm. Folosind raportul $\dfrac{OP}{D'O} = \dfrac{1}{3}$, obținem $OP = \dfrac{1}{3}\cdot 3\sqrt{6} = \sqrt{6}$ cm.

În triunghiul DOP: $DO^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 = DP^2 + PO^2$.

Conform **reciprocei teoremei lui Pitagora**, rezultă că $DP \perp PO$.

Cum dreapta DB' este perpendiculară pe dreptele AC și $D'O$ conținute în planul $(D'AC)$ și concurente în O, rezultă că $DB' \perp (ACD')$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 80

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11	-12	$-\frac{5}{3}$	$\frac{2}{5}$	26	16	4	3	D	C	B	D

III. 13. a) Persoana cheltuieşte: în prima zi, 30% din S, a doua zi, 40% din S iar a treia zi, $\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=25\%$ din S. Deci, persoana cheltuieşte mai mult a doua zi.

b) Avem ecuaţia: $S-(30\%+40\%+25\%)\cdot S=600$.

Deci, $S-\frac{95}{100}\cdot S=600$, adică $\frac{1}{20}\cdot S=600$, de unde $S=600\text{ lei}\cdot 20=12000\text{ lei}$.

14. a) Cum $f:[-2;3]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{2}$, avem: $D(1;1)\in Gf$, dacă $f(1)=2$. Cum $f(1)=0$, rezultă că punctul D nu se află pe graficul lui f.

$P(-1;-1)\in Gf$, dacă $f(-1)=-1$. Cum $f(-1)=-1$, rezultă că punctul P se află pe graficul funcţiei.

$Q(-3;-2)$ nu se află pe graficul funcţiei, deoarece $-3\notin[-2;3]$, care e domeniul funcţiei.

b) Cum funcţia este definită pe un interval închis, vom calcula valorile din capete:

$f(-2)=-\frac{3}{2}$ şi $f(3)=1$. Fie $A\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$ şi $B(3,1)$ Reprezentarea geometrică a graficului funcţiei f este segmentul închis $[AB]$ (**fig.1**).

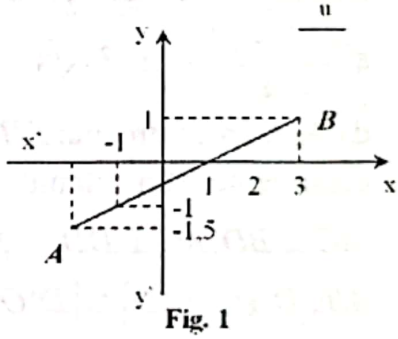


Fig. 1

c) Pentru $f(x)=\frac{x-1}{2}$, rezultă inecuaţia:

$4\cdot\frac{x-1}{2}-x\sqrt{2}<4\Leftrightarrow 2x-2-x\sqrt{2}<4$. Rezultă

$2x-x\sqrt{2}<6$, de unde $x\left(2-\sqrt{2}\right)<6$, deci $x<\frac{6}{2-\sqrt{2}}$,

adică $x<\frac{6\left(2+\sqrt{2}\right)}{4-2}$ deci $x<3\left(2+\sqrt{2}\right)$, de unde $x<6+3\sqrt{2}$. Cum $6+3\sqrt{2}=6+\sqrt{9\cdot 2}=$

$=6+\sqrt{18}<6+\sqrt{25}=6+5=11$ *iar* $x\in\mathbf{N}$, rezultă că $x\in\{0,1,2,3.4.5.6.7.8.9.10\}$. Se putea folosi şi aproximarea lui $\sqrt{2}$ cu 1,41, obţinând că $x<10,23$ de unde rezulta aceeaşi soluţie.

15. a) Vezi **figura 2.**

b) Cum $MN\parallel BC$, considerând secanta BI, obţinem $\langle MIB\equiv\langle IBC$, ca alterne interne Analog, faţă de secanta CI, obţinem $\langle NIC\equiv\langle ICB$ (**fig. 3**). Cum $[BI$ este bisectoarea $\langle ABC$ şi $[CI$ este bisectoarea $\langle ACB$, folosind tranzitivitatea, rezultă că $\langle MIB\equiv\langle MBI$ şi că $\langle NIC\equiv\langle NCI$, de unde rezultă că triunghiurile ΔMBI şi ΔNCI sunt isoscele, cu vârful în M, respectiv, în N. Rezultă $MI=MB$ şi că $NI=NC$, deci $BM+CN=IM+IN=MN$.

c) Aria totală a prismei (**fig. 2**) este suma dintre aria laterală şi dublul ariei bazei este egală cu:

Scanned with OKEN Scanner

$$3\cdot AB\cdot AA'+2\cdot\frac{AB^2\cdot\sqrt{3}}{4}=$$

$$=3\cdot 18\cdot 6+\frac{324\cdot\sqrt{3}}{2}=$$

$$=324+162\cdot\sqrt{3}=162\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\text{cm}^2.$$

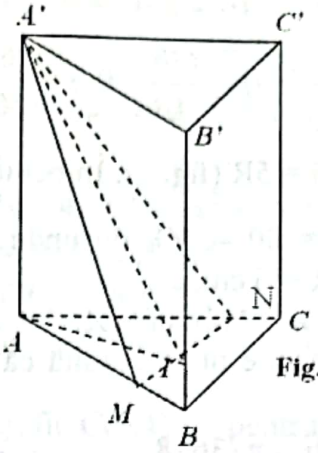


Fig. 2

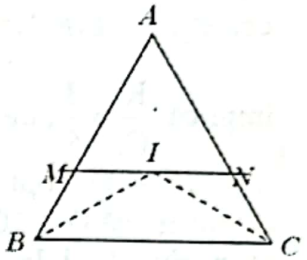


Fig. 3

d) Cum $MN \parallel BC$ şi $AI \perp BC$, rezultă că şi $AI \perp MN$. Cum $AA' \perp (ABC)$ şi $A'I \perp MN$, măsura unghiului planelor (ABC) şi $(A'MN)$ este măsura unghiului dreptelor AI şi $A'I$, adică unghiul $A'IA$. În triunghiul dreptunghic $A'AI$, avem

$$\text{tg}\left(\sphericalangle A'IA\right)=\frac{A'A}{AI}=\frac{A'A}{\frac{2}{3}\cdot AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{6}{18\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{6}{6\cdot\sqrt{3}}\overset{(6}{=}\overset{\sqrt{3})}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\text{tg}30°,\text{ deci } m\left(\sphericalangle A'AI\right)=30°.$$

VARIANTA 81

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
32	505	b	2	60	60	24	56	C	D	B	D

III. 13. Avem rapoartele : $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}=k\,(1)$.

a) Cum $\frac{a}{2}=\frac{c}{5}$ rezulta $a=\frac{^{20/}2c}{5}=\frac{40c}{100}$, deci $a=40\%c$.

b) Din (1), înlocuim $a=2k$, $b=3k$, $c=5k$ în $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=56$, obţinând: $(-k)^2+(-2k)^2+(3k)^2=56$, adică $14k^2=56$, de unde $k=2$ şi $a=4$, $b=6$ şi $c=10$.

14. a) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2x+1$

$$f(\sqrt{2})\cdot f\left(\sqrt{2}-1\right)=\left(2\sqrt{2}+1\right)\cdot\left[2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)+1\right]=\left(2\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(2\sqrt{2}-2+1\right)=\left(2\sqrt{2}\right)^2-1=7.$$

b) Pentru $x=1$, avem $f(1)=3$, deci $(1,3)\in G_f$; fie $A(1;3)$
$x=-1$, avem $f(-1)=-1$, deci $(-1,-1)\in G_f$; fie $B(-1;-1)$ reprezentarea geometrică a graficului funcţiei f este dreapta AB (**fig.1**).

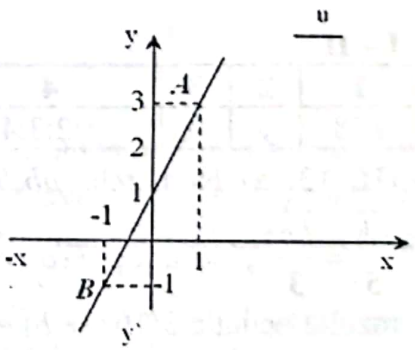


Fig. 1

c) $\sqrt{f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)-2n}=$

$$=\sqrt{2\cdot 1+1+2\cdot 2+1+2\cdot 3+1+\ldots+2n+1-2n}=$$

$$=\sqrt{2(1+\ldots+n-1)+n}=\sqrt{2\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}^{(2}+n}=$$

$$=\sqrt{n^2}=n\in\mathbb{N},(\forall)n\in\mathbb{N}^*.$$

15. a) Vezi **figura 2.**

b) Cum $\mathcal{P}_{\Delta ABC}$ = 32 cm, rezultă că 2R + 2G = 32 cm, de

Scanned with OKEN Scanner

unde R + G = 16cm.

$\cos \sphericalangle[AB;(EBC)] = \cos \sphericalangle(ABO) = \frac{OB}{AB} = 0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

implică $\frac{R}{G} = \frac{3}{5}$, de unde 3G = 5R (**fig. 2**). Înlocuind R = 16 – G obținem 3G = 80 – 5G, de unde 8G = 80. Deducem că G = 10 cm și R = 6 cm.

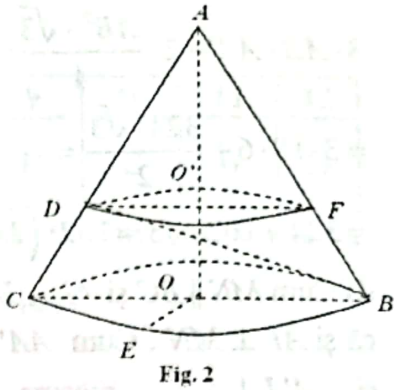


Fig. 2

c) În triunghiul dreptunghic AOB obținem $AO^2 = AB^2 - OB^2 = 100 - 36 = 64$ (**Pitagora**), de unde rezultă că înălțimea conului este $h = AO = 8$ cm.

Volumul conului: $\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 36 \cdot 8}{3} = 36\pi \text{ cm}^3$.

d) Cum planul cercului de la baza conului este paralel cu planul de secțiune, care determină în con discul de centru O' și rază $r = O'F$, obținem $DF \parallel CB$, și deci $\Delta ADF \sim \Delta ACB$ (**teorema fundamentală a asemănării**). Rezultă că $\frac{AF}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{DF}{BC} = \frac{2r}{2R} = \frac{r}{R}$, iar, cum $FB = AB - AF$, scriind proporții derivate, obținem: $\frac{AB - FA}{AB} = \frac{R - r}{R}$, adică $\frac{FB}{AB} = \frac{R - r}{R}$. Din $DF \parallel CB$, considerând secanta DB obținem congruența unghiurilor alterne interne $\sphericalangle FDB \equiv \sphericalangle DBC$. Cum, însă, $\sphericalangle FBD \equiv \sphericalangle DBC$, prin tranzitivitate, ajungem la concluzia că $\sphericalangle FDB \equiv \sphericalangle FBD$, deci triunghiul DFB este isoscel cu vârful în F. Înlocuind $AB = 10$ cm și pe FB cu $DF = 2r$, rezultă că $\frac{2r}{10} = \frac{6 - r}{6}$, iar ecuația $12r = 60 - 10r$ are soluția $r = \frac{30}{11}$ cm. Deducem că generatoarea trunchiului este de $FB = 2r = \frac{60}{11}$ cm, și din formula ariei laterale a trunchiului de con $\mathcal{A}_l = \pi G(R + r)$ obținem că aceasta este $\pi \cdot \frac{60}{11} \cdot \left(\frac{66}{11} + \frac{30}{11}\right) = \frac{5760}{121}\pi \text{ cm}^2$.

VARIANTA 82

I – II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
148	y	0	1;2;3;4	1 sau 17	720	60	288	D	C	B	C

III. 13. a) Numerele $\overline{ab}, \overline{bc}$ fiind direct proporționale cu 5, respectiv 3, obținem că $\frac{\overline{ab}}{5} = \frac{\overline{bc}}{3}$, de unde $3 \cdot \overline{ab} = 5 \cdot \overline{bc}$. Cum $\overline{ab} = 10a + b$, $a \neq 0$, iar $\overline{ba} = 10b + a$, $b \neq 0$, rezultă ecuația $3(10a + b) = 5(10b + c)$, adică $30a - 5c = 47b$, deci $47b = 5(6a - c)$, de unde deducem că 5 divide produsul $47b$. Cum 5 nu îl divide pe 47, rezultă că cifra b nenulă este divizibilă cu 5, deci $b = 5$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Pentru $b = 5$, obținem, din ecuația $47b = 5(6a - c)$, că $6a - c = 47$, de unde $6a > 47$, adică $a > 7$. Dar a este cifră, deci $a \in \{8,9\}$. Pentru $a = 8$, calculăm $c = 1$, iar pentru $a = 9$, rezultă $c = 7$. Deci, numerele căutate sunt $(\overline{ab}, \overline{bc}) \in \{(85,51);(95,57)\}$.

14. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x + 4$

a) $f(x) \cdot g(x) = (x + 2) \cdot (x + 4) = x^2 + 2x + 4x + 8 = x^2 + 6x + 8$, oricare ar fi x număr real.

b) Pentru $x = -2 \to f(-2) = 0$, deci $(-2,0) \in Gf$; fie $A(-2;0)$

pentru $x = 0 \to f(0) = 2$, deci $(0,2) \in Gf$; fie $B(0;2)$.

Deci, reprezentarea geometrică a graficului funcției f este dreapta AB.

Pentru $x = 0$, $g(0) = 4$, deci $(0,4) \in Gg$; fie $C(0,4)$ iar pentru $x = -4$, $g(4) = 0$, deci $(-4, 0) \in Gg$ și fie $D(-4,0)$. Așadar, reprezentarea geometrică a graficului funcției g este dreapta CD (**fig. 1**).

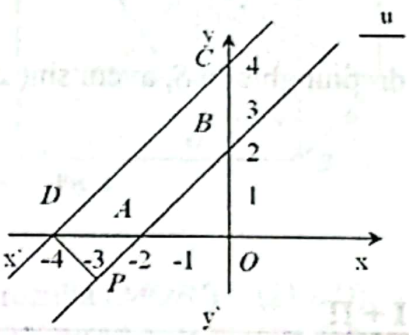


Fig. 1

c) Cum intersecția graficului funcției g cu axa absciselor este punctul $D(-4,0)$, aleg acest punct de la care urmează să calculez distanța la graficul funcției f. Fie $DP \perp AB$, cu $P \in AB$, deci distanța căutată este lungimea segmentului $[DP]$. Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice DPA și BOA (**criteriul „unghi – unghi”**), rezultă $\frac{DP}{BO} = \frac{DA}{BA}$. Înlocuind $BO = 2u$, $DA = 2u$, $BA = 2\sqrt{2}\ u$ (se obține aplicând teorema lui **Pitagora** în ΔAOB dreptunghic în O sau folosind **formula distanței** dintre două puncte), rezultă că $DP = \frac{BD \cdot DA}{BA} = \sqrt{2}\ u$.

15. a) Vezi **figura 2.**

b) Cum $D'C' \perp (BCC')$, iar $C'O \subset (BCC')$, rezultă că $D'C' \perp C'O$, deci triunghiul $D'C'O$ este dreptunghic în C'(**fig. 2**) și $D'O^2 = D'C'^2 + C'O^2$ (**Pitagora**). Din triunghiul dreptunghic BCC' obținem $BC'^2 = CB^2 + C'C^2$ (**Pitagora**), de unde $BC' = \sqrt{4+12} = 4$. Dar O, fiind intersecția diagonalelor dreptunghiului $BCC'B'$, este mijlocul segmentului $[BC']$, deci $OC' = 2$ cm. Așadar, $D'O = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (cm).

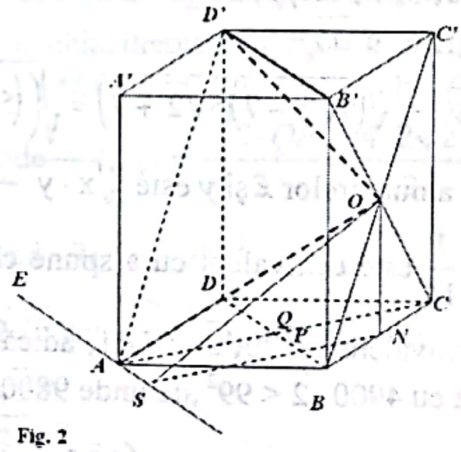


Fig. 2

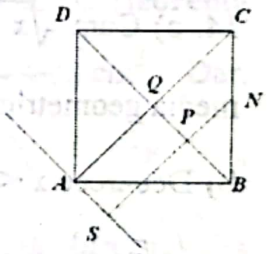


Fig. 3

c) Cum $AB \perp (BCC')$ și $BO \subset (BCC')$, obținem că $AB \perp BO$ de unde $AO^2 = AB^2 + BO^2 = 4 + 4 = 8$, iar $AO = 2\sqrt{2}$cm. În triunghiul dreptunghic ADD' avem $D'A^2 = D'D^2 + AD^2$ (**Pitagora**). Cum $AD'^2 = 16 = AO^2 + D'O^2$, aplicând, în triunghiul $D'OA$ **teorema reciprocă a lui Pitagora** obținem că triunghiul este dreptunghic în O.

d) Dreptele AO și $D'B'$ sunt necoplanare. Fie $AE \parallel D'B'$, deci unghiul cerut este $\sphericalangle(OA, AE)$. Aleg N mijlocul laturii $[BC]$. Cum, în triunghiul BCC', $[ON]$ este linie mijlocie, rezultă că $ON \parallel C'C$. Dar $C'C \perp (BCA)$, de unde rezultă că $ON \perp (ABC)$. Construim $NS \perp AE$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

și obținem că $OS \perp AE$ **(teorema celor trei perpendiculare)**. Lungimea segmentului $[OS]$ se află din triunghiul ONS, dreptunghic în N, după ce se determină $NS = PS + PN$, unde $[PN]$ este linie mijlocie în triunghiul CQB, iar $PS = QA$ din dreptunghiul $QPSA$ **(fig. 3)**. Se obține $NS = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, iar $OS^2 = ON^2 + SN^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3 + \frac{18}{4} = \frac{30}{4}$. În triunghiul OSA dreptunghic în S, avem $\sin(\angle OAS) = \frac{OS}{OA} = \frac{\frac{\sqrt{30}}{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

VARIANTA 83

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
17	8	5	2	74	14	36	125	B	A	D	D

III. 13. a) Cum $\overline{ab} = 10a + b$, iar $\overline{ba} = 10b + a$ rezultă $\left(\overline{ab}\right)^2 - \left(\overline{ba}\right)^2 = \left(\overline{ab} - \overline{ba}\right) \cdot \left(\overline{ab} + \overline{ba}\right)$ $= (9a - 9b) \cdot (11a + 11b) = 9 \cdot 11 \cdot (a^2 - b^2)$, număr ce este divizibil cu 9.

b) Din teorema împărțirii cu rest, obținem $\overline{ba} = 4 \cdot (a+b) + 12$ cu condiția ca $a + b > 12$. Înlocuind $\overline{ba} = 10b + a$, rezultă ecuația $10b + a = 4a + 4b + 12$, de unde $6b = 3a + 12$, adică $2b = a + 4$, deci a este cifră pară și nenulă. Pentru a egal cu 2, 4, 6, 8, obținem pentru b valorile 3, 4, 5, respectiv 6. Dar numai $a + b = 8 + 6 = 14$ verifică condiția restului, deci soluția este $\overline{ab} = 86$.

14. a) Cum $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{\left(5\sqrt{2} - 7\right)\left(5\sqrt{2} + 7\right)} = \sqrt{\left(\left(5\sqrt{2}\right)^2 - 7^2\right)} = \sqrt{50 - 49} = 1$, obținem că media geometrică a numerelor x și y este $\sqrt{x \cdot y} = 1$.

b) Deoarece $x < \frac{1}{14}$ este echivalent cu a spune că $14x < 1$, îl înlocuim pe x și obținem: $14 \cdot \left(5\sqrt{2} - 7\right) < 1$, echivalent cu $70\sqrt{2} - 98 < 1$, adică $70\sqrt{2} < 99$, echivalent cu $\sqrt{70^2 \cdot 2} < 99$, relație echivalentă cu $4900 \cdot 2 < 99^2$, de unde $9800 < 9801$, relație adevărată.

c) Cum $\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} = \frac{1}{\left(5\sqrt{2} - 7\right)^4} + \frac{1}{\left(5\sqrt{2} + 7\right)^4} = \left(\frac{1}{5\sqrt{2} - 7}\right)^{4\ (5\sqrt{2}+7)} + \left(\frac{1}{5\sqrt{2} + 7}\right)^{4\ (5\sqrt{2}-7)} = \left(\frac{5\sqrt{2} + 7}{\left(5\sqrt{2}\right)^2 - 7^2}\right)^4 +$

$$+ \left(\frac{5\sqrt{2} - 7}{\left(5\sqrt{2}\right)^2 - 7^2}\right)^4 = \left(5\sqrt{2} + 7\right)^4 + \left(5\sqrt{2} - 7\right)^4 = \left(99 + 70\sqrt{2}\right)^2 + \left(99 - 70\sqrt{2}\right)^2 = 2 \cdot \left(99^2 + 9800\right)$$

de unde $\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} = 39202$, care este un număr natural.

15. a) Vezi **figura 1.**

b) Cum $DD' \parallel CC'$ şi $[DD'] \equiv [CC']$, rezultă că $D'B'BD$ este un dreptunghi (**fig. 1**) , de unde deducem că:

$A_{\Delta B'MO} = A_{BDD'B'} - (A_{\Delta DMO} + A_{\Delta B'BO} + A_{\Delta B'D'M})$.

$$A_{\Delta B'MO} = BD \cdot BB' - \frac{DM \cdot DO + OB \cdot BB' + D'M \cdot D'B'}{2}.$$

$$A_{\Delta B'MO} = 4\sqrt{2} \cdot 4 - \frac{2 \cdot 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot 4 + 2 \cdot 4\sqrt{2}}{2}$$

$$A_{\Delta B'MO} = 16\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + 8\sqrt{2}}{2}. \; A_{\Delta B'MO} =$$

$= 16\sqrt{2} - 10\sqrt{2}$, deci $A_{\Delta B'MO} = 6\sqrt{2}$ cm^2.

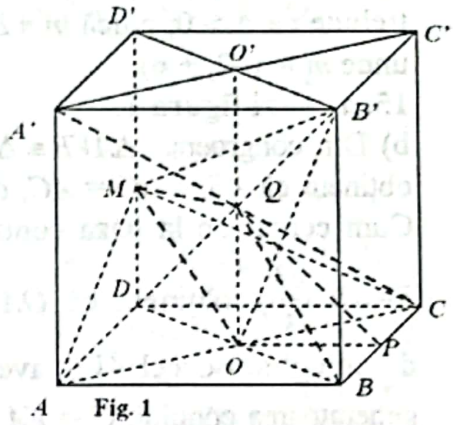


Fig. 1

c) Cum $C \in AO$ rezultă $(MAO) = (MAC)$; $OM, OB' \subset (D'DB)$ rezultă $(MOB') = (D'BD)$. Cum $AC \perp BD$, $AC \perp BB'$ şi $BD \cap BB' = \{B\}$, $BD, BB' \subset (B'OB)$ rezultă $AC \perp (BDD')$. Din $AC \perp (BDD')$ şi $AC \subset (MAD)$ rezultă $(MAC) \perp (BDD')$, de unde $(AMO) \perp (B'MO)$.

d) Fie $A'C \cap AC'' = \{Q\}$ iar $A'C' \cap B'D'' = \{O'\}$.

Cum $[AA'] \parallel [CC']$ şi $[AA'] \equiv [CC']$ rezultă că $AA'C'C$ este un dreptunghi şi $A'C$ şi AC' sunt diagonale. De aici deducem că punctul Q este mijlocul lui $[A'C]$. Cum $DD' \parallel OO'$ şi $[DD'] \equiv [OO']$ rezultă că $MD \parallel QO$ şi $[MD] \equiv [QO]$ de unde rezultă că $MQOD$ este dreptunghi, deci $MQ \parallel DO$ şi $[MQ] \equiv [DO]$. Cum $O \in BD$, iar $OD = BD$ rezultă că $MQ \parallel OB$ şi $[MQ] \equiv [OB]$ de unde rezultă că $MQBO$ este paralelogram, şi de aici, $MO \parallel QB$. Obţinem că unghiul format de dreptele $A'C$ şi MO este unghiul dreptelor QB şi $A'C$, adică $\sphericalangle BQC$.

Aleg P mijlocul lui $[BC]$. Cum $QO \perp (ABC)$ şi $OP \perp BC$, rezultă $QP \perp BC$ (**teorema celor trei perpendiculare**), de unde $A_{\Delta QBC} = \frac{BC \cdot QP}{2} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ cm^2. Dar, $A_{\Delta QBC} = \frac{QB \cdot QC \cdot \sin(\langle BQC)}{2}$. Calculând $BQ^2 = BO^2 + OQ^2 = 2^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 12$ (**Pitagora**), obţinem că $BQ = QC = 2\sqrt{3}$ cm. Din formula ariei, prin înlocuire, rezultă $\sin(\sphericalangle BQC) = \frac{BC \cdot QP}{QB \cdot QC} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{2}}{12} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

VARIANTA 84

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
14	4	5	c	300	7	45	4	B	C	B	D

III. 13. a) La ambele olimpiade merg $18 + 15 - 27 = 6$ elevi.

b) Numai la olimpiada de matematică participă $18 - 6 = 12$ elevi.

14. a) Pentru $m = 2$, ecuaţia devine $x^2 + 6x + 5 = 0$, ecuaţie ce are soluţiile -1 şi -5.

b) Înlocuind pe x cu $-m$ obţinem ecuaţia: $m^2 - 2m(m + 1) + m^2 + m - 1 = 0$ care este echivalentă cu ecuaţia $m = -1$, care are soluţia -1. Deci $m = -1$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Pentru ca soluțiile ecuației să fie numere reale diferite, trebuie ca $\Delta > 0$, adică $m+2>0$, deci numărul real $m > -2$, de unde $m \in (-2, +\infty)$.

15. a) Vezi **figura 1.**

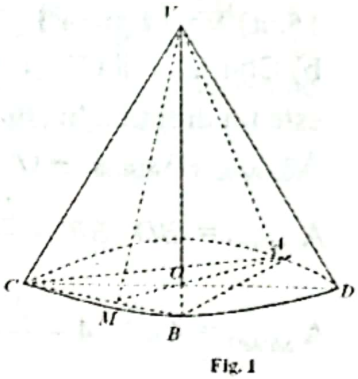


Fig. 1

b) Din congruența $\Delta AVB \equiv \Delta BVC \equiv \Delta CVA$ (cazul **catetă-catetă**), obținem că $AB = BC = AC$, deci ΔABC este echilateral (**fig. 1**). Cum cercul de la baza conului îi este circumscris și are raza $R = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$, obținem că $OA = R = 6\sqrt{3}$ cm. Din triunghiul dreptunghic isoscel AVB, avem $AB^2 = VA^2 + VB^2$ (**Pitagora**), deci $VA^2 = 162$, de unde rezultă generatoarea conului, $G = VA = 9\cdot\sqrt{2}$ cm. Din triunghiul VAO, dreptunghic în O, obținem că $VO^2 = VA^2 - OA^2 = 162 - 108 = 54$, deci înălțimea conului este $h = VO = 3\sqrt{6}$ cm.

c) Cum $V_{con} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot \left(6\sqrt{3}\right)^2 \cdot 3\sqrt{6}}{3} = \pi \cdot 108 \cdot \sqrt{6}\ cm^3$.

d) Cum $VA \perp VB$, $VA \perp VC$, $VB \cap VC = \{V\}$, $VB, VC \subset (VBC)$, atunci $VA \perp (VBC)$. Dar, $VM \subset$ (VBC), deci $VA \perp VM$. Cum $VA \perp VB$, iar $(VAM) \cap (VAB) = VA$, rezultă că măsura unghiului dintre planele (AVM) și (AVB) este egală cu măsura unghiului BVM. În triunghiul VBC avem: $BC^2 = 324 = VB^2 + VC^2$, deci $m(\langle BVC) = 90^\circ$ (**teorema reciprocă a teoremei lui Pitagora**). Cum ΔVBC este dreptunghic și isoscel în V, rezultă că $m(\langle BVM) = 45^\circ$.

VARIANTA 85

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
405	8	12	2	40	4	25	36	A	A	C	B

III. 13. a) Din **teorema împărțirii cu rest**, rezultă $\overline{xy} = 6c + 4$, cu c natural. Cel mai mic număr de forma $\overline{xy}$ în condițiile date este $10 = 6\cdot 1 + 4$, iar cel mai mare, $94 = 6\cdot 15 + 4$. Rezultă că vor fi atâtea numere, câte câturi am de la 1 la 15, adică 15 numere.

b) Fie a și b deîmpărțitul, respectiv împărțitorul. Din **teorema împărțirii cu rest** rezultă $a = b\cdot 4 + 6$. Cum $a + b = 260 - 4 = 256$, înlocuind, obținem $4b + 6 + b = 256$, deci $5b = 250$, de unde rezultă că $b = 50$ și $a = 206$.

14. a) $a \cdot b = \sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)} = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$.

b) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, deci $(a+b)^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 + 2\sqrt{2} + \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 =$

$= \left|2-\sqrt{2}\right| + 2\sqrt{2} + \left|2+\sqrt{2}\right| = 2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2}$.

c) $\frac{b}{a} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} - \sqrt{2} = \sqrt{\overset{(2+\sqrt{2})}{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}} - \sqrt{2} = \sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}} - \sqrt{2} = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$

Scanned with OKEN Scanner

$-\sqrt{2}=\sqrt{2+1+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}-\sqrt{2}=\left|\sqrt{2}+1\right|-\sqrt{2}=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=1\in Q$.

15. a) Vezi **figura 1**.

b) Cum $DABC$ este o piramidă triunghiulară regulată de bază ABC, rezultă că ΔABC este echilateral cu latura $AB=l$, de arie $\frac{l^2\cdot\sqrt{3}}{4}=27\sqrt{3}$ cm^2 (**fig. 1**). Obţinem că $l^2=27\cdot 4$, de unde rezultă $l=AB=6\sqrt{3}$ cm. Fie O centrul bazei ABC, iar M, mijlocul laturii $[BC]$. Cum $DO\perp(ABC)$ şi $OM\perp BC$, rezultă că $DM\perp BC$ (**teorema celor trei perpendiculare**), deci DM este apotema piramidei.

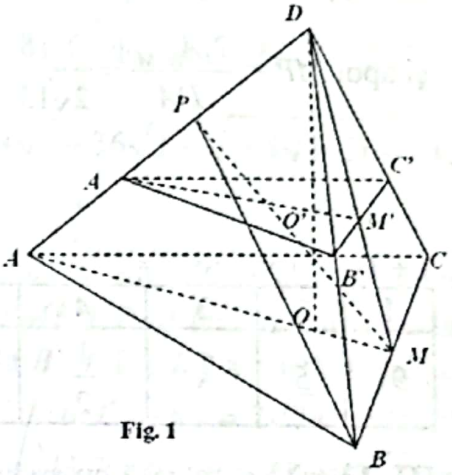


Fig. 1

Din triunghiul dreptunghic DOM rezultă $DM^2=DO^2+OM^2$ (**Pitagora**). Cum $OM=\frac{l\sqrt{3}}{6}=\frac{6\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{6}=3$ cm şi $DO=4$ cm, obţinem că $DM=5$ cm.

c) Fie α planul de secţiune şi intersecţia acestuia cu piramida, suprafaţa triunghiului $A'B'C'$. Fie $\alpha\cap DO=\{O'\}$. Ştim că $DO'=\frac{1}{2}DO$ şi cum $\alpha\parallel(ABC)$, rezultă că piramida $DA'B'C'$ este asemenea cu piramida iniţială $DABC$, iar raportul de asemănare este $k=\frac{1}{2}$. Ştim că volumele a două piramide asemenea este egal cu cubul raportului de asemănare, deci volumul piramidei $DA'B'C'$ este $\frac{1}{8}$ din volumul piramidei iniţiale, de unde rezultă că volumul trunchiului format este egal cu $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ din volumul piramidei $DABC$. Cum volumul piramidei $DABC$ este $\frac{A_{\Delta ACB}\cdot DO}{3}=\frac{27\sqrt{3}\cdot 4}{3}=36\sqrt{3}$, volumul trunchiului de piramidă este $\frac{7}{8}\cdot 36\sqrt{3}^{(4}=\frac{7\cdot 9\sqrt{3}}{2}=\frac{63\sqrt{3}}{2}$ cm^3. Se poate folosi şi formula volumului trunchiului de piramidă $\frac{OO'}{3}\cdot\left(A_{\Delta ABC}+A_{\Delta A'B'C'}+\sqrt{A_{\Delta ABC}\cdot A_{\Delta A'B'C'}}\right)$, unde $OO'=\frac{1}{2}\cdot DO=2$ cm, iar $A_{\Delta A'B'C'}=\frac{1}{4}\cdot A_{\Delta ABC}=\frac{27\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

d) Cum $BM\perp AM$ şi $BM\perp DM$, rezultă că $BM\perp(AMD)$. Construind $MP\perp AD$, obţinem că $BP\perp AD$. (**teorema celor trei perpendiculare**) Deoarece $(ABD)\cap(AMD)=AD$, rezultă că tangenta unghiului celor două plane este $tg(\langle BPM)=\frac{BM}{MP}$.

$A_{\Delta DAM}=\frac{AM\cdot DO}{2}=\frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}\cdot DO}{2}=\frac{9\cdot 4}{2}=18\text{cm}^2$, iar $A_{\Delta DAB}=\frac{DA\cdot BP}{2}$. Se determină

Scanned with OKEN Scanner

$DA=2\sqrt{13}$ cm din triunghiul DOA ($DA^2=DO^2+OA^2=16+36$, conform teoremei lui **Pitagora**) și apoi $MP=\frac{2\cdot A_{DAM}}{DA}=\frac{2\cdot 18}{2\sqrt{13}}=\frac{18}{\sqrt{13}}$. Rezultă că $\text{tg}(\sphericalangle BPM)=\frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{13}}{18}=\frac{\sqrt{39}}{6}$.

VARIANTA 86

I + II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
91	5	4	$\frac{1}{2}$	56	20	$100\sqrt{3}$	200	C	A	B	D

III. 13. a) Se notează cu x suma inițială și avem $x-\left(\frac{2}{3}x+15\right)=y$; $y-\frac{40}{100}y=27$. Se obține $y=45$ lei și $x=180$ lei.

b) A doua zi a cheltuit $45-27=18$ lei.

14. a) $E\left(\sqrt{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}+2\cdot 3-3\sqrt{3}-6}{3-4}$ și observăm că numărătorul în valoarea 0, deci $E\left(\sqrt{3}\right)=0$.

b) $x^3+2x^2-3x-6=x^2(x+2)-3(x+2)=(x+2)(x^2-3)$. Dar $x^2-4=(x+2)(x-2)$, deci $E(x)=\frac{(x+2)(x^2-3)}{(x+2)(x-2)}$ se simplifică prin $(x+2)$ și obțin $E(x)=\frac{x^2-3}{x-2}$.

c) $E(a)=\frac{a^2-3}{a-2}\in\mathbb{Z}$ implică $a-2/a^2-3$ de unde $a-2/a^2-4+1$ dar $a-2/(a-2)(a+2)$ adică $a-2/a^2-4$ deci $a-2/1$ de unde $a-2\in\{-1;1\}$ rezultă că $a\in\{1;3\}$.

15. a) Vezi **figura 1**.

b) Notez $AC'\cap A'C=\{P\}$ și MM' este apotema trunchiului. $P\in MM'$. (PM) este mediană în triunghiul dreptunghic APC, în P, deci $PM=\frac{1}{2}\cdot AC$, de unde $PM=12$ cm. Dar în triunghiul dreptunghic $A'PC'$, (PM') este mediană, deci $PM'=\frac{1}{2}\cdot A'C'$, de unde $PM'=6$ cm. Deci $MM'=PM+PM'=18$ cm.

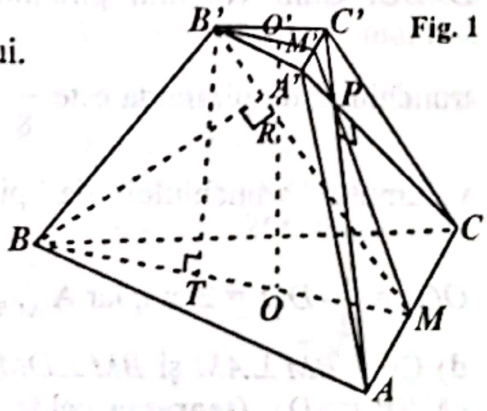


Fig. 1

c) $V=\frac{h}{3}\left(\mathcal{A}_B+\mathcal{A}_b+\sqrt{\mathcal{A}_B\cdot\mathcal{A}_b}\right)$; $\mathcal{A}_B=\frac{24^2\sqrt{3}}{4}=144\sqrt{3}$ cm^2.

$\mathcal{A}_b=\frac{12^2\cdot\sqrt{3}}{4}=36\sqrt{3}$ cm^2. În trapezul dreptunghic $OMM'O'$, construim $M'E\perp OM$, $E\in OM$; $OM=a_3=\frac{24\sqrt{3}}{6}=4\sqrt{3}$;

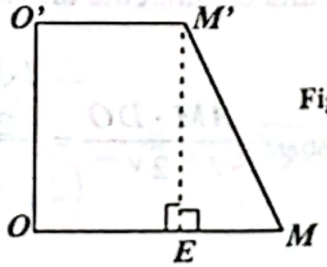


Fig. 2

Scanned with OKEN Scanner

$O'M' = a_3 = \frac{12\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{3}$; $EM = OM - O'M' = 2\sqrt{3}$ cm. Din triunghiul dreptunghic $M'EM$ (**fig. 2**) obținem $M'E^2 = M'M^2 - EM^2 = 18^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2$ de unde $M'E = 2\sqrt{78}$, deci $OO' = 2\sqrt{78}$ cm. Înlocuind obținem $V = \frac{2\sqrt{78}}{3}\left(144\sqrt{3} + 36\sqrt{3} + \sqrt{144\sqrt{3} \cdot 36\sqrt{3}}\right)$, adică $V = 504\sqrt{26}$ cm^3.

d) Din $AC \perp MM'$, $AC \perp MB$ și $MM', MB \subset (BMB')$ rezultă că $AC \perp (BMB')$, cum $AC \subset (B'AC)$ rezultă că $(B'AC) \perp (BMB')$. Dar $(B'AC) \cap (BMB') = B'M$ deci distanța de la punctul B la planul $(B'AC)$ este distanța de la B la dreapta $B'M$. Fie BR această distanță, deci $BR \perp B'M$, $R \in B'M$. Construim $B'T \perp BM$. Rezultă că $B'T = OO' = 2\sqrt{78}$ cm (sunt înălțimi în trapezul $BMM'B'$). Din triunghiul dreptunghic AMP obținem $AP = 12\sqrt{2}$ cm (**Pitagora**), iar din triunghiul dreptunghic $C'M'P$ obținem $C'P = 6\sqrt{2}$ cm (**Pitagora**).

Dar $AC' = AP + PC' = 18\sqrt{2}$ cm implică $B'C = 18\sqrt{2}$ cm ($AC' = B'C$ pentru că sunt diagonale ale fețelor laterale). Cum $AC \perp (BMB')$ și $B'M \subset (BMB')$ rezultă că $B'M \perp AC$ deci din triunghiul dreptunghic $B'MC$ obținem $B'M = 6\sqrt{14}$ cm (**Pitagora**). $BM = \frac{24\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ cm.

În triunghiul $BB'M$, $BR \perp B'M$ și $B'T \perp BM$ implică $BR \cdot B'M = B'T \cdot BM$ adică $BR \cdot 6\sqrt{14} = 2\sqrt{78} \cdot 12\sqrt{3}$ de unde $BR = \frac{12\sqrt{91}}{7}$ cm.

VARIANTA 87

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
105	18	$(-\infty;1]$	336	1,2	32	150	$36\sqrt{3}$	C	D	D	A

III. 13. a) Suma are $103 - 43 = 60$ de termeni.

b) Majorând toți termenii cu $\frac{1}{44}$ avem: $S < \underbrace{\frac{1}{44} + \frac{1}{44} + \ldots + \frac{1}{44}}_{60 \text{ termeni}} = \frac{60}{44} = \frac{15}{11}$. Cum $\frac{15}{11} < \frac{3}{2}$, deoarece $\frac{30}{22} < \frac{33}{22}$, rezultă partea dreaptă a inegalității. Minorând toți termenii cu $\frac{1}{103}$ avem: $S > \underbrace{\frac{1}{103} + \frac{1}{103} + \ldots + \frac{1}{103}}_{60 \text{ termeni}} = \frac{60}{103}$. Cum $\frac{60}{103} > \frac{1}{2}$, deoarece $\frac{120}{206} > \frac{103}{206}$, rezultă partea stângă a inegalității.

14. a) Punctele $A(-1, -1)$ și $B(0, -3)$ sunt situate pe graficul funcției f.

b) Graficul funcției intersectează axa Ox în punctul $C\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$ iar axa

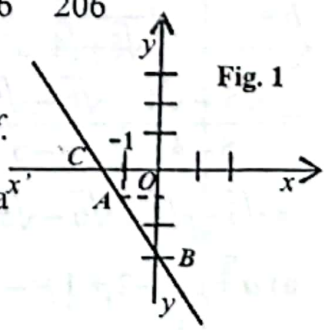


Fig. 1

Oy în punctul B. $\mathcal{A}_{BOC} = \dfrac{OB \cdot OC}{2} = \dfrac{3 \cdot \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{9}{4}$ (u. a.)

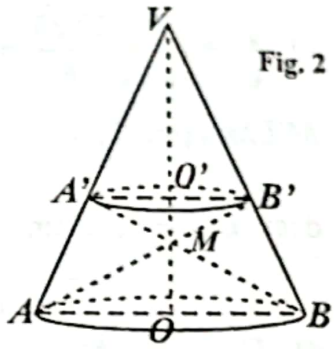


Fig. 2

c) $f\left(\sqrt{3}\right) - f\left(\sqrt{2}\right) = \left(-2\sqrt{3}-3\right) - \left(-2\sqrt{2}-3\right) = -2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

iar valoarea raportului este $\dfrac{-2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = -2 \in \mathbb{Q}$.

15. a) Vezi figura 2.

b) Din asemănarea triunghiurilor $VO'B'$ şi VOB rezultă că $\dfrac{VO'}{VO} = \dfrac{O'B'}{OB}$ şi $\dfrac{VO-VO'}{VO} = \dfrac{OB-O'B'}{OB}$ de unde $\dfrac{OO'}{VO} = \dfrac{OB-O'B'}{OB}$. În triunghiurile dreptunghice AMB şi $A'MB'$ avem $MO = \dfrac{AB}{2}$ şi, respectiv, $MO' = \dfrac{A'B'}{2}$, iar prin adunare $OO' = MO + MO' = \dfrac{AB+A'B'}{2} = \dfrac{2(OB+O'B')}{2}$ şi, înlocuind mai sus, se obţine: $\dfrac{OB+O'B'}{VO} = \dfrac{OB-O'B'}{OB}$, iar $\dfrac{6+O'B'}{12} = \dfrac{6-O'B}{6}$, de unde $O'B' = 2$ cm iar $OO' = 8$ cm.

c) Înlocuind în formula volumului $\mathcal{V} = \dfrac{\pi \cdot 8}{3}(6^2 + 2^2 + 2 \cdot 6) = \dfrac{416}{3}\pi$ cm^3.

d) Avem $VA^2 = AO^2 + VO^2 = 36 + 144 = 180°$ şi $VA = 6\sqrt{5}$ cm. Atunci din $\mathcal{L}_{cerc} = \mathcal{L}_{arc}$ rezultă că $\dfrac{\pi \cdot VA \cdot n}{180} = 2\pi OA$ de unde $n = 72\sqrt{5}\,°$. Trebuie să arătăm că $72\sqrt{5} < 161$, ceea ce este, echivalent prin ridicare la pătrat, cu $25920 < 25921$, relaţie evidentă.

VARIANTA 88

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
-6	14	84	1400	1	$10\sqrt{2}$	144	1210	D	B	D	C

III. 13. Numerele $a = -\left(\dfrac{476}{238}\right)^{238} = -2$,

$b = \left(\sqrt{5}-\sqrt{4}\right)\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} + \left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} + \left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} + \left(\sqrt{8}-\sqrt{7}\right)\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}} + \left(\sqrt{9}-\sqrt{8}\right)\dfrac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}} =$

$= \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{5-4} + \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{6-5} + \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{7-6} + \dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{7}}{8-7} + \dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{9-8} =$

$= \sqrt{5}-\sqrt{4}+\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{6}+\sqrt{8}-\sqrt{7}+\sqrt{9}-\sqrt{8} = \sqrt{9}-\sqrt{4} = 1$, $c = \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{9}{5} = 1$.

a) $a + c = -2 + 1 = -1 \in \mathbb{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $a+b+c=-2+1+1=0$.

14. a) Dacă $A(-1, 5)$ şi $B(0, 4)$ aparţin graficului funcţiei atunci $f(-1)=5$ şi $f(0)=4$. Obţinem ecuaţiile $-a+b=5$ şi $b=4$ cu soluţia comună $a=-1$, $b=4$. Atunci $f(x)=-x+4$.

b) Aplicând formula $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ şi înlocuind avem $AB=\sqrt{(0+1)^2+(4-5)^2}=\sqrt{2}$.

c) Dacă punctul $M(a; a)$ este situat pe grafic, atunci $f(a)=a$ şi obţinem ecuaţia $-a+4=a$ cu soluţia $a=2$. Deci $M(2; 2)$.

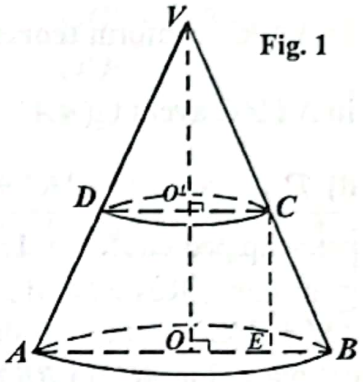


Fig. 1

15. a) Vezi **figura 1.**

b) Considerăm secţiunea axială $ABCD$ cu centrele bazelor mari, respectiv, mici: O şi O' iar V vârful conului din care provine trunchiul, ca în **figura 1**. Din proporţionalitate avem $\frac{O'D}{3}=\frac{OO'}{4}=\frac{BC}{5}$ şi cum $O'D=15$ avem că $OO'=20$ cm şi $BC=25$ cm.

c) În trapezul dreptunghic $OO'CB$ construim $E=pr_{OB}C$. Astfel $OE=O'C=15$ şi $CE=OO'=20$. În ΔCEB, dreptunghic în E, $EB^2=BC^2-CE^2=25^2-20^2=225$ iar $EB=15$ cm. Deci $OB=OE+EB=30$ cm. Atunci $\mathcal{A}_l=\pi\cdot BC(OB+O'C)=$ $=\pi\cdot 25\cdot(30+15)=1125\pi$ cm^2.

d) Cum $\Delta VO'C\sim\Delta VOB$ rezultă rapoartele $\frac{VO'}{VO}=\frac{O'C}{OB}$ şi $\frac{VO'}{VO'+OO'}=\frac{O'C}{OB}$.

Atunci $\frac{VO'}{VO'+20}=\frac{15}{30}$ ceea ce conduce la $VO'=20$ cm şi $VO=40$ cm. Aplicând formula volumului $\mathcal{V}=\frac{\pi\cdot r^2\cdot h}{3}$ rezultă că $\mathcal{V}=\frac{\pi\cdot 900\cdot 40}{3}=12000\pi$ cm^3.

VARIANTA 89

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
175	9753	245	5	125	360	2	400	D	B	B	C

III. 13. a) Notăm cu x numărul de răspunsuri corecte şi cu y numărul de răspunsuri greşite date de Radu. Atunci avem ecuaţiile $x+y=20$ şi $20x-10y=220$ cu soluţia comună $x=14$ şi $y=6$.

b) Trebuie ca $20x-10y>350$ şi ţinând cont de $x+y=20$ avem $20x-10(2-x)>350$ şi $30x>550$, cum $x\le 20$, rezultă că numărul minim de răspunsuri corecte este 19.

14. a) Dacă punctul $A(-2; 0)$ este situat pe graficul funcţiei atunci $f(-2)=0$ şi rezolvând ecuaţia $-2m+m-5=0$, obţinem $m=-5$.

b) $f(x)=-5x-10$ iar $A(-2; 0)$ şi $B(0, -10)$ sunt situate pe graficul funcţiei. (**figura 1**)

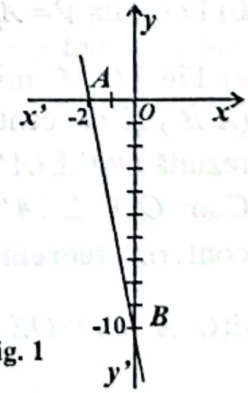


Fig. 1

c) ΔAOB este cel căutat. În ΔOAB, $AB^2=OA^2+OB^2$ şi $AB=2\sqrt{26}$.

$\mathcal{P}_{AOB}=OA+OB+AB=2+10+2\sqrt{26}=\left(12+2\sqrt{26}\right)$(u.l.).

Scanned with OKEN Scanner

15. a) Vezi **figura 2.**

b) Formula $\mathcal{A}_t = 2(ab + bc + ac)$ ne conduce la

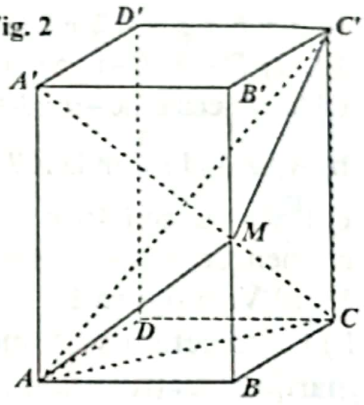
$\mathcal{A}_t = 2 \cdot 30 \cdot 15 + 2 \cdot 30 \cdot 15 + 2 \cdot 15 \cdot 15 = 2250 \text{ cm}^2$.

c) $pr_{(ABC)}A'C = AC \Rightarrow m(\sphericalangle(A'C, (ABC))) = m(\sphericalangle A'CA)$. **(fig. 2)**

În ΔABC, conform **teoremei lui Pitagora,** avem $AC = 15\sqrt{5}$ cm.

În $\Delta A'AC$ avem $tg(\sphericalangle A'CA) = \dfrac{A'A}{AC} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Fig. 2



d) $\mathcal{P}_{AMC'} = AM + MC + AC'$, iar cum AC' este diagonală în paralelipiped cu $AC' = 15\sqrt{6}$ cm, triunghiul AMC' are perimetrul minim, dacă $AM + MC' =$ = minimă. Realizăm desfăşurarea feţelor $ABB'A$ şi $BCC'B'$, suma $AM + MC'$ = minimă, dacă şi numai dacă punctele A, M, C' sunt coliniare. Fie $AC' \cap BB' = \{M'\}$ **(fig. 3).**

Cum $\Delta ABM' \sim \Delta ACC'$: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BM'}{CC'}$, de unde $\dfrac{30}{45} = \dfrac{BM'}{15}$ iar $BM' = 10$ cm. Punctul M este situat pe muchia $[BB']$ la 10 cm de B.

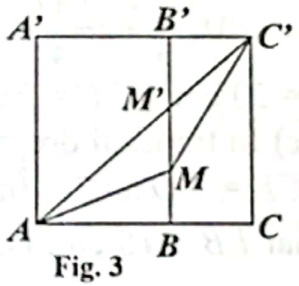


Fig. 3

VARIANTA 90

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	a	15	18	81	6	4	28	A	B	D	D

III. 13. a) Privim pe ultimele trei coloane $32 + 28 + 1 = 61$ elevi.

b) Notă mai mică decât 6 au obţinut $2 + 7 = 9$ elevi, iar în total avem 120 de elevi. Atunci probabilitatea $= \dfrac{\text{nr. de cazuri favorabile}}{\text{nr. de cazuri posibile}}$ şi $P = \dfrac{9}{120} = \dfrac{3}{40}$.

14. a) Cum $f(1) = -1$, $f(2) = 0$, $f(3) = 1$, $f(5) = 3$ atunci mulţimea valorilor funcţiei este $\{-1; 0; 1; 3\}$.

b) Reprezentarea grafică a funcţiei este mulţimea formată din punctele $A(+1; -1)$, $B(2; 0)$, $C(3; 1)$, $D(5; 3)$ **(figura 1).**

c) Fie punctul $E(1, 3)$. Din triunghiul dreptunghic APE cu teorema lui **Pitagora** se obţine $AP^2 = AE^2 + EP^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, de unde $AP = 5$ (u.l.).

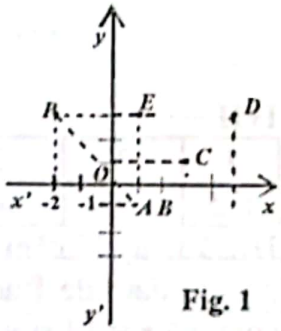


Fig. 1

15. a) Vezi **figura 2.**

b) Formula $\mathcal{V} = A_b \cdot h = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} \cdot AA'$ ne dă $\mathcal{V} = 180\sqrt{3}$ cm^3.

c) Fie M, M' mijloacele laturilor (BC) şi $(B'C')$, E mijlocul laturii $(A'B')$ şi O' centrul de greutate al bazei $A'B'C'$. Întrucât $OO' \parallel AA'$ rezultă $OO' \perp (A'B'C')$.

Cum $OO' \perp (A'B'C')$, $O'E \perp A'B'$, $O'E, A'B' \subset (A'B'C')$ rezultă conform **teoremei celor trei perpendiculare** că $OE \perp A'B'$ şi

$d(O, A'B') = OE$. $C'E = \dfrac{A'B'\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm şi $O'E = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm

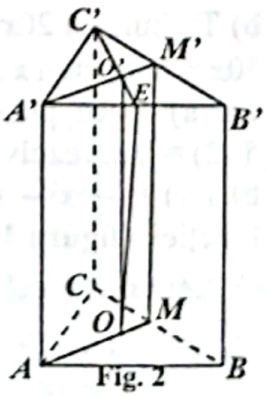


Fig. 2

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

și cu **teorema lui Pitagora** aflăm, în $\Delta OO'E$, $OE^2 = OO'^2 + O'E^2 = 25 + 12 = 37$ și $OE = \sqrt{37}$ cm.

d) Pentru că $(ABC) \parallel (A'B'C')$ atunci $m(\sphericalangle((ABC), (A'B'O))) = m(\sphericalangle((A'B'C'), (A'B'O)))$. Întrucât $(A'B'C') \cap (OA'B') = A'B'$, $O'E \perp A'B'$, $OE \perp A'B'$ avem că

$m(\sphericalangle((ABC), (A'B'O))) = m(\sphericalangle OEO')$. În $\Delta OO'E$ avem $tg(\sphericalangle OEO') = \frac{OO'}{O'E} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

VARIANTA 91

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4235	a	1	102	75	30	$4\sqrt{3}$	D	B	A	B

III. 13. a)

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Numărul de elevi	3	4	5	7	6	3	2

b) $m_p = \frac{4\cdot3+5\cdot4+6\cdot5+7\cdot7+8\cdot6+9\cdot3+10\cdot2}{3+4+5+7+6+3+2} = \frac{206}{30} = 6{,}86$.

14. a) Graficul funcției este dreapta AB. **(fig. 1)**

b) Cum punctele $A(2; 0)$ și $B(0; 4)$ sunt situate pe grafic avem $f(2) = 0$ și $f(0) = 4$, de unde avem ecuațiile $2a + b = 0$ și $b = 4$ cu soluția comună $a = -2$, $b = 4$. Așadar $f(x) = -2x + 4$.

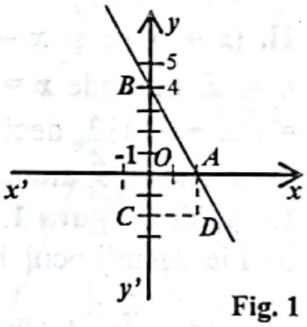


Fig. 1

c) Punctul $C(0; -2)$. $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{(AD+BC)\cdot CD}{2} = \frac{(2+4+2)\cdot 2}{2} = 8$ (u.a).

15) a) Vezi **figura 2.**

b) $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ și atunci $A'C^2 = 8^2 + 8^2 + 6^2$ de unde $A'C = 2\sqrt{41}$ cm.

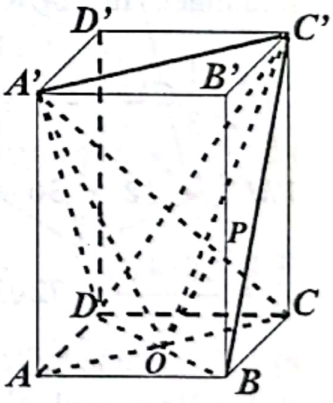


Fig. 2

c) Construim $OP \perp A'C$, $P \in [A'C]$. Atunci $\Delta CPO \sim \Delta CAA'$ (u.u.) rezultând că $\frac{CO}{CA'} = \frac{OP}{AA'}$ și înlocuind avem $OP = \frac{12\sqrt{82}}{41}$ cm.

d) Triunghiul $\Delta A'BD$ și $\Delta C'BD$ fiind isoscele avem că $A'O \perp BD$ și $C'O \perp BD$. Atunci $m(\sphericalangle((A'BD), (C'BD))) = m(\sphericalangle A'OC')$.

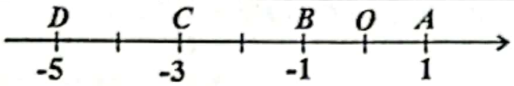
Exprimăm aria triunghiului $A'OC'$ în două moduri:

$\mathcal{A}_{A'OC'} = \frac{d(O, A'C')\cdot A'C'}{2} = \frac{OA'\cdot OC'\cdot \sin(\sphericalangle A'OC')}{2}$. Cum $d(O, A'C') = AA'$, avem $\frac{6\cdot 8\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{17}\cdot \sin(\sphericalangle A'OC')}{2}$ iar $\sin(\sphericalangle A'OC') = \frac{12\sqrt{2}}{17}$. Am folosit **teorema lui Pitagora** în $\Delta AOA'$ și $A'O = 2\sqrt{17}$ cm.

VARIANTA 92

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	11	3	6	3	$24\sqrt{3}$	972	40	C	C	B	A

13. a) 

b) Aplicând definiția mediei aritmetice $m_a = \frac{(-5)+(-3)+(-1)+(+1)}{4} = \frac{-8}{4} = -2$.

14. a) Ecuația $x^2 + 2x - 35 = 0$ are $\Delta = 144$ și soluțiile $x \in \{-7; 5\}$.

b) $E(n)$ se mai scrie $(n + 7)(n - 5)$ și pentru ca $E(n)$ să fie număr prim trebuie ca unul din factori să fie 1. Se înlocuiește și se obține $n \in \{-8; 6\}$.

c) Dacă $E(x) = (x + 7)(x - 5) \vdots 3$, cum 3 este număr prim analizăm cazurile:

I. $(x + 7) \vdots 3$ și $x + 7 = 3n$, $n \in \mathbb{Z}$ de unde $x = 3n - 7$ iar $x - 5 = 3n - 5 - 7 = (3n - 12) \vdots 3$, deci $E(x) \vdots 9$.

II. $(x - 5) \vdots 3$ și $x - 5 = 3n$, $n \in \mathbb{Z}$ de unde $x = 3n$, $n \in \mathbb{Z}$ de unde $x = 3n + 5$ iar $x + 7 = 3n + 5 + 7 = (3n + 12) \vdots 3$, deci $E(x) \vdots 9$. Cum ambele numere sunt divizibile cu 3, atunci produsul lor este divizibil cu 9.

15. a) Vezi **figura 1**.

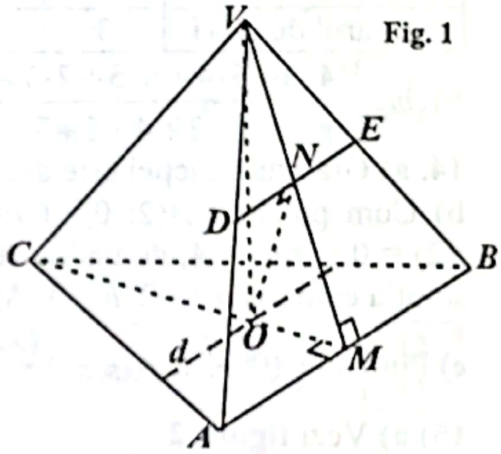


Fig. 1

b) Fie M mijlocul laturii $[AB]$. O va fi centrul bazei piramidei. În ΔABC: $CM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm, iar cum $OM = \frac{1}{3}CM = 2\sqrt{3}$ cm. În ΔVOM: $m(\sphericalangle VOM) = 90°$ și $VM^2 = OM^2 + VO^2$, de unde $VM^2 = 12 + 36 = 48$ iar $VM = 4\sqrt{3}$ cm. Formula $\mathcal{A}_l = \frac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2}$, ne conduce la $\mathcal{A}_l = \frac{36 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 72\sqrt{3}$ cm^2. **(fig. 1)**

c) DE este linie mijlocie în triunghiul VBC și $DE \parallel AB \subset (ABC)$ deci $DE \parallel (ABC)$.

d) Fie N mijlocul lui $[DE]$, atunci N va fi și mijlocul lui $[VM]$. Construim prin O, paralela d la dreapta AB. Avem astfel $d \parallel AB \parallel DE$ și pentru că $AB \perp (VOM)$ atunci $d \perp (VOM)$, deci $d \perp ON$, $d \perp OM$. Întrucât $(DOE) \cap (ABC) = d$, avem că $m(\sphericalangle((DOE), (ABC))) = m(\sphericalangle NOM)$. În ΔVOM, $\sin(\sphericalangle VMO) = \frac{VO}{VM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle VMO) = 60° \Rightarrow m(\sphericalangle VMO) = m(\sphericalangle NOM) = m(\sphericalangle((DOE), (ABC))) = 60°$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 93

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
16	120	$\frac{1}{4}$	0	3	$25\sqrt{3}$	12	64	C	C	A	D

13. a) Fie x preţul iniţial al telefonului. După prima ieftinire preţul telefonului va fi 90% din x. După a doua ieftinire preţul telefonului va fi 90% din (90% din x) = 810 lei.

Rezolvând ecuaţia $\frac{90}{100}\cdot\left(\frac{90}{100}\cdot x\right)=810$ obţinem $\frac{81}{100}\cdot x = 810$ cu soluţia $x = 1000$ (lei).

b) Notăm cu p procentul căutat. Atunci $\frac{100-p}{100}\cdot 1000 = 810$.

14. a) Ecuaţia se scrie echivalent $2(3x + 6) - (3 \cdot 0 + 6) = [3 \cdot (-2) + 6]$ sau $6x + 6 = 0$ cu soluţia $x = -1$.

b) Punctele $A(-2; 0)$ şi $B(0; 6)$ sunt situate pe graficul funcţiei. (**Fig. 1**)

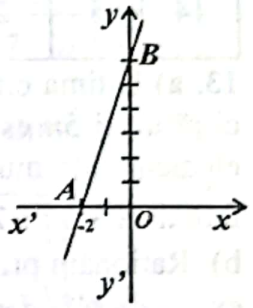


Fig. 1

c) Altfel scrisă, $S = (3 \cdot 0 + 6) + (3 \cdot 2 + 6) + \ldots + (3 \cdot 32 + 6) =$
$= 3(0 + 2 + \ldots + 32) + 6 \cdot 17 = 3 \cdot 2(1 + 2 + \ldots + 16) + 6 \cdot 17 =$
$= 3 \cdot 2 \cdot \frac{16(16+1)}{2} + 6 \cdot 17 = 3 \cdot 16 \cdot 17 + 6 \cdot 17 = 918.$

15. a) Vezi **figura 2.**

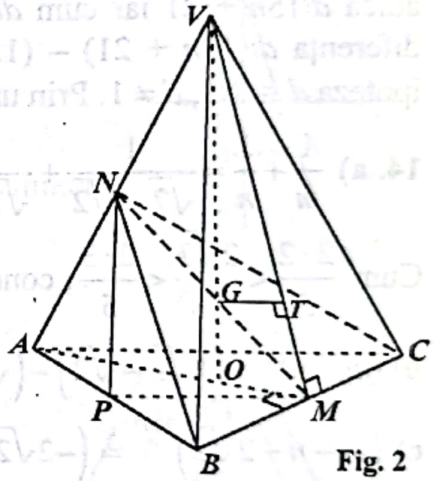


Fig. 2

b) În triunghiul ABC, $AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$ şi atunci $AM = 6\sqrt{3}$ cm, de unde $AO = \frac{2}{3}AM = 4\sqrt{3}$ cm. În ΔVOA, $m(\sphericalangle VOA) = 90°$, $VO^2 = VA^2 - AO^2 = 144 - 48$ rezultând $VO = 4\sqrt{6}$ cm.

Formula $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$ conduce la $V = \frac{AB^2\sqrt{3}\cdot VO}{12} = 144\sqrt{2}$ cm^3.

Observaţie! Pentru că piramida este un tetraedru regulat putem aplica formula direct $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, unde a este muchia tetraedrului regulat.

c) Dacă P este mijlocul lui $[AB]$, $[MP]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC şi $PM \parallel AC$, $[NP]$ este linie mijlocie la în ΔVAB şi urmează că $PN \parallel VB$.

Deci $m(\sphericalangle(MN, AC)) = m(\sphericalangle PMN)$. În ΔVAM isoscel, $MN \perp VA$, deci în ΔNAM avem $MN^2 = AM^2 - AN^2$ şi, înlocuind, avem $MN = 6\sqrt{2}$ cm. Pentru că $PM = PN = 6$ cm, deducem conform **teoremei reciproce a lui Pitagora** că $m(\sphericalangle NPM) = 90°$ iar $m(\sphericalangle PMN) = 45°$.

d) MA şi MV fiind apoteme în tetraedru regulat rezultă că $BC \perp MV$ şi $BC \perp MA$, cum $MA \cap MV = \{M\}$, rezultă că $BC \perp (VAM)$. Dar $BC \subset (VBC)$, de unde $(VAM) \perp (VBC)$.

Fie $GT \perp VM$, $T \in VM$ (**fig. 2**), cum $(VBC) \cap (VAM) = VM$ şi $GT \subset (AVM)$ rezultă că $GT \perp (VBC)$, deci distanţa de la punctul G la planul (VBC) este egală cu lungimea segmentului GT.

Scanned with OKEN Scanner

În ΔVAM isoscel, $[MN]$ fiind mediană este şi bisectoarea $\sphericalangle AMV$ şi, cum $OG \perp AM$, $G \in (MN)$, implică $OG = GT$. Dar $GO \perp (ABC)$, deci punctul G este egal depărtat de feţele (ABC) şi (VBC) ale tetraedrului. Datorită simetriei, punctul G este egal depărtat de toate feţele tetraedrului $VABC$.

VARIANTA 94

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
14	5	21	$\frac{2}{6}$	60	5	600	8	D	B	B	D

13. a) Ultima cifră a unui pătrat perfect, aparţine mulţimii A = {0; 1; 4; 5; 6; 9}. Ultima cifră a lui $5n$ este 0 sau 5 şi atunci ultima cifră a lui $5n + 2$ este 2 sau 7 care nu sunt elemente ale mulţimii A . Deci $5n + 2$ nu poate fi un pătrat perfect ceea ce conduce la faptul că $\sqrt{5n+2}$ este un număr iraţional.

b) Raţionăm prin metoda reducerii la absurd. Presupunem că fracţia este reductibilă deci există $d \in \mathbb{N}^*$, $d \neq 1$, astfel încât $d/5n + 7$ şi $d/3n + 4$. Cum $d/5n + 7$ rezultă că $d/3(5n + 7)$, adică $d/15n + 21$ iar cum $d/3n + 4$ rezultă că $d/5(3n + 4)$, adică $d/15n + 20$ şi făcând diferenţa $d/(15n + 21) - (15n + 20)$, obţinem că $d/1$. Deci $d = 1$, ceea ce contrazice ipoteza $d \in \mathbb{N}^*$, $d \neq 1$. Prin urmare, fracţia este ireductibilă.

14. a) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{7-2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{7-2}=\frac{2\sqrt{7}}{5}$.

Cum $\frac{2\cdot 2}{5}<\frac{2\sqrt{7}}{5}<\frac{2\cdot 3}{5}$, concluzia este imediată.

b) $(m-n)^2=\left[\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)\right]^2=\left(-2\sqrt{2}\right)^2=8.$

c) $\left(m-n+2\sqrt{2}\right)^{2007}=\left(-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)^{2007}=0.$

15. a) Vezi **figura 1**.

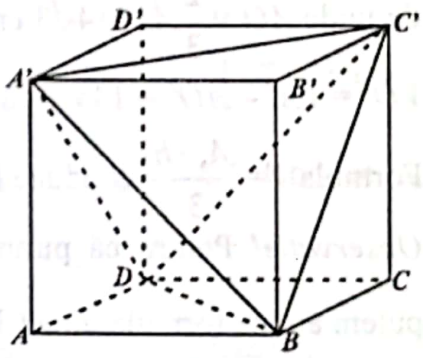


Fig. 1

b) Triunghiul $A'C'B$ este echilateral cu latura $A'B = AB\sqrt{2}$ şi atunci $\mathcal{A}_{[A'C'B]}=\frac{d^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\left(AB\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\left(18\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{324\cdot 2\sqrt{3}}{4}=162\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

c) Exprimăm volumul tetraedrului $A'C'BB'$ în două moduri:

$\mathcal{V}_{[A'B'C'B]}=\frac{\mathcal{A}_{A'C'B'}\cdot BB'}{3}=\frac{\mathcal{A}_{[A'C'B]}\cdot d(B',(A'C'B))}{3}$ de unde $\frac{162\cdot 18}{3}=\frac{162\sqrt{3}\cdot d}{3}$ şi obţinem lungimea lui $d = 6\sqrt{3}$ cm.

d) Piramida $DA'B'C'$ este un tetraedru regulat cu lungimea muchiei $AB\sqrt{2}$ şi se procedează în aflarea înălţimii ca la problema **15**, varianta **21**, iar $\mathcal{A}_{A'C'B} = 162\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

Scanned with OKEN Scanner

Altfel, ținem cont de observația de la problema **15**, varianta **93** avem că $\mathcal{V}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ și

înlocuind $\mathcal{V}=\frac{\left(18\sqrt{2}\right)^3\cdot\sqrt{2}}{12}=\frac{18^3\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{12}=1944\ \text{cm}^3$.

VARIANTA 95

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
30	5	45	9	100	50	36	36	D	C	B	D

13. a) Folosind scrierea zecimală, $S=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=111(a+b+c)=3\cdot 37\cdot(a+b+c)$, de unde 37/S.

b) Cum *a, b, c* reprezintă, fiecare, prima cifră a unui număr natural ele sunt diferite de 0 și deci valoarea minimă a sumei $S=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=111(a+b+c)=444$ se obține când *a, b, c* sunt minime, dar nu toate 1, pentru că mulțimea A nu ar mai avea 3 elemente. În acest caz $A=\{122; 212; 221\}$.

14. a) $f\left(\sqrt{2}-1\right)=-3\left(\sqrt{2}-1\right)+2=-3\sqrt{2}+5$;

$f\left(\sqrt{2}\right)=-3\sqrt{2}+2$. Deci $f\left(\sqrt{2}-1\right)>f\left(\sqrt{2}\right)$.

b) Punctele $A(0; 2)$ și $B(1; -1)$ sunt situate pe grafic. **(fig. 1)**

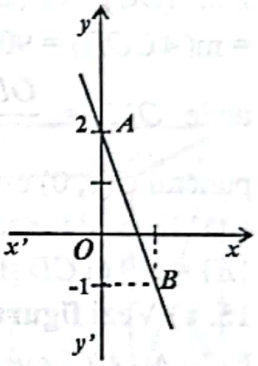


Fig. 1

c) Dacă punctul $P\left(\frac{a+3}{2};2a+1\right)$ este situat pe graficul funcției, atunci

$f\left(\frac{a+3}{2}\right)=2a+1$ și înlocuind în formula funcției avem

acuația $(-3)\cdot\frac{a+3}{2}+2=2a+1$ cu soluția $a=-1$.

15. a) Vezi **figura 2.**

b) Formula $\mathcal{V}=\frac{\mathcal{A}_b\cdot h}{3}$ ne conduce la $\frac{72\cdot VO}{3}=144\sqrt{3}$, de unde $VO=6\sqrt{3}$ cm. **(fig. 2)**

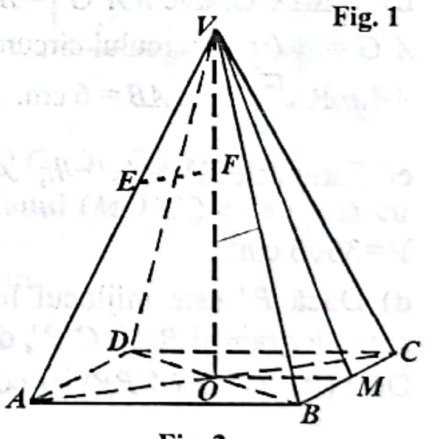


Fig. 2

În ΔVOA, $VA^2=VO^2+AO^2$ și atunci $VA=12$ cm, de unde ΔVAC este echilateral, pentru că $AC=AB\sqrt{2}=12$ cm.

c) În ΔVOM, $VM^2=VO^2+OM^2$ de unde $VM=3\sqrt{14}$ cm. Formula $\mathcal{A}_l=\frac{\mathcal{P}_b\cdot a_p}{3}$ ne dă

$\mathcal{A}_l=\frac{4\cdot 6\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{14}}{2}=72\sqrt{7}\ \text{cm}^2$.

d) Pentru că $AC\perp(VBD)$ atunci $(VAC)\perp(VBD)$. Considerând $F=\text{pr}_{VO}E$ avem că: $EF\perp(VBD)$. În triunghiul VOA, $EF\parallel AO$ și conform **teoremei fundamentale a asemănării** $\Delta VFE\sim\Delta VOA$ și $\frac{VE}{VA}=\frac{EF}{AO}$, de unde, $\frac{1}{3}=\frac{EF}{6}$ adică $EF=2$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 96

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
143	3	+4,5	0	0	36	10	70	D	C	A	C

13. a) Inecuația $3 < x \leq 9$ are ca soluție mulțimea $A = \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

b) Dacă $y \vdots 3$ atunci $y = 3n$, $n \in \mathbb{N}$ și cum $y \in A$ rezultă că $A \cap B = \{2 \cdot 3; 3 \cdot 3; 4 \cdot 3; ...; 21 \cdot 3\}$ iar $a = 21 \cdot 3 = 63$.

14. a) $f(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$; $g(3) = 0{,}5 \cdot 3 + 1 = 2{,}5$ iar $f(2) - 2 \cdot g(3) = 2 - 5 = -3$.

b) Intersecția graficului funcției f cu axele de coordonate sunt punctele $A(1, 0)$ și $B(0, -2)$, iar a graficului funcției g sunt punctele $C(-2, 0)$ și $D(0, 1)$. **(fig. 1)** Graficele funcțiilor f și g sunt dreptele AB și, respectiv, CD.

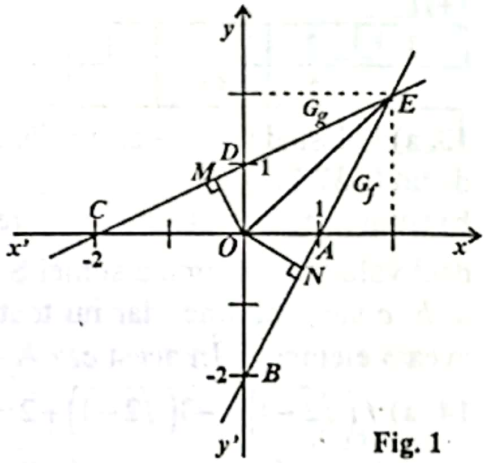


Fig. 1

Fie $OM \perp CD$, $ON \perp AB$, unde $M \in CD$ și $N \in (AB)$.

Din $(OC) \equiv (OB)$, $(OD) \equiv (OA)$ și $m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle COD) = 90°$, rezultă că $\Delta OAB \equiv \Delta ODC$ (C.C.), de unde $OM = \dfrac{OD \cdot OC}{CD} = \dfrac{OA \cdot OB}{AB} = ON$. Prin urmare, punctul $O(0, 0)$ este egal depărtat de dreptele AB și CD. O altă linie de demonstrație utilizează congruența triunghiurilor ΔCOE și ΔBOE, unde $\{E\} = AB \cap CD$ și $E(2, 2)$. Va rezulta că punctul O este situat pe bisectoarea $\sphericalangle BEC$ etc.

15. a) Vezi **figura 2.**

b) În $\Delta AA'G$, avem $A'G^2 = AG^2 - AA'^2$ iar $A'G = 2\sqrt{3}$ cm.

$A'G = R$ (raza cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$ și a ΔABC). Dar $AB = R\sqrt{3}$, deci $AB = 6$ cm.

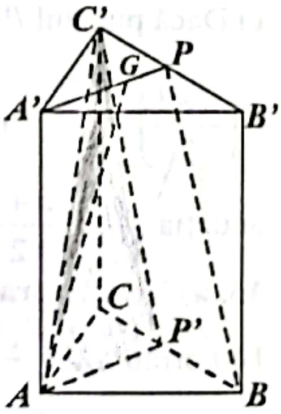


Fig. 2

c) Formulele $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h$; $\mathcal{A}_b = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}$ și $\mathcal{A}_b = 9\sqrt{3}$ cm conduce la $\mathcal{V} = 36\sqrt{3}$ cm^3.

d) Dacă P' este mijlocul lui $[BC]$ atunci patrulaterul $BPC'P'$ este paralelogram și $BP \parallel C'P'$, de asemenea $A'P \parallel AP'$.

Deci $(AP'C') \parallel (A'PB)$ iar concluzia este imediată.

VARIANTA 97

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
31	$\frac{11}{13}$	5	$\frac{2}{5}$	71	8	128	12	C	C	B	B

13. a) Să considerăm că muncitorii A, B, C au primit sumele a, b și, respectiv, c. Atunci $\dfrac{a}{13} = \dfrac{b}{6} = \dfrac{c}{11} = k$, $k > 0$ de unde $a = 13k$, $b = 6k$, $c = 11k$. Dar $a + b + c = 2088$ și, înlocuind, obținem $13k + 6k + 11k = 2088$, de unde $30k = 2088$ cu soluția $k = 69{,}6$. Drept urmare $a = 904{,}8$ lei, $b = 417{,}6$ lei iar $c = 765, 6$ lei.

Scanned with OKEN Scanner

b) Fie p procentul căutat. Atunci $\frac{p}{100} \cdot 2088 = 417{,}6$ cu soluția $p = 20$. Muncitorul B primește un procent de 20%.

14. a) Punctele $A(0; -2)$ și $B(2; 0)$ aparțin graficului funcției f prin urmare graficul funcției este dreapta AB.

b) Se rezolvă ecuația $f(x) = g(x)$ adică $x - 2 = 2x - 3$ cu soluția $x = 1$ și $f(1) = -1$. Punctul căutat este $D(1; -1)$.

c) $f\left(\frac{a+1}{a}\right) = \frac{a+1}{a} - 2 = \frac{-a+1}{a}$; $g\left(\frac{a-1}{a+1}\right) = 2 \cdot \frac{a-1}{a+1} - 3 = \frac{2a-2}{a+1} - 3$.

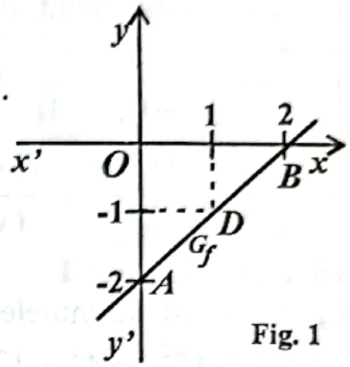


Fig. 1

Ecuația este echivalentă cu $\frac{-a+1}{a} + \frac{2a-2}{a+1} - 3 + 3 = 0$ și

$\frac{-a+1}{a} + \frac{2a-2}{a+1} = 0$, de unde $\frac{(a+1)(-a+1)+(2a-2)(a+1)}{a(a+1)} = 0$,

drept urmare $\frac{a^2-2a+1}{a(a+1)} = 0$ și $\frac{(a-1)^2}{a(a+1)} = 0$, ecuație care are soluția $a = 1$.

15. a) Vezi **figura 2.**

b) Dacă $AB = a$, în $\Delta D'DM$ avem: $D'M^2 = DD'^2 + DM^2$ și deci $36 = a^2 + \frac{5a^2}{4}$ cu soluția pozitivă $a = 4$ cm.

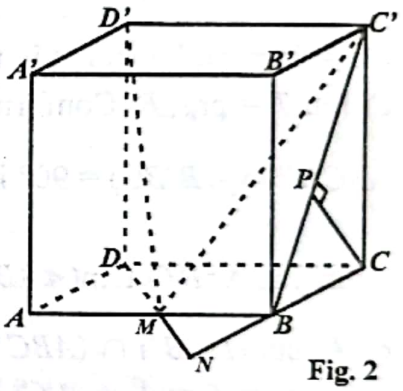


Fig. 2

c) $DM \cap (BB'C') = DM \cap BC = \{N\}$. Pentru că $[MB]$ este linie mijlocie în ΔNCD, $MB = \frac{DC}{2}$ atunci $NC = 2a = 8$ cm.

d) Fie $CP \perp BC'$, $P \in BC'$. Planele $(MC'D')$ și $(BC'D')$ coincid pentru că $AB \parallel C'D'$. Deoarece $D'C' \perp (BCC')$ și $D'C' \subset (BC'D')$ rezultă că $(BC'D') \perp (BCC')$ și cum $(BD'C') \cap (BCC') = BC'$ rezultă că $CP \perp (BD'C')$ și prin urmare distanța de la punctul C la planul $(MD'C')$ este egală cu lungimea segmentului CP, unde $CP = \frac{BC'}{2} = \frac{BC\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ cm.

VARIANTA 98

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	2	230	-7	$9\sqrt{3}$	120	7	30	B	D	B	A

13. a) Fie a numărul cerut. Conform teoremei împărțirii cu rest avem $a = 6c_1 + 4$ și $a = 15c_2 + 4c_1$, $c_2 \neq 0$, de unde $a - 4 = 6c_1$ iar $a - 4 = 15c_2$. Rezultă că $(a-4) \vdots [6; 15]$, drept urmare $(a-4) \vdots 30$. Cerința ca a să fie minim este îndeplinită de numărul $30 + 4 = 34$.

b) Avem că $(a; b) = 7$, de unde $a = 7d$ și $b = 7e$; $d, e \in \mathbb{N}^*$ cu $(d; e) = 1$.

Dacă $a + b = 35$ atunci $7d + 7e = 35$ iar $d + e = 5$, de unde $(d; e) \in \{(1; 4); (2; 3); (3; 2); (4; 1)\}$. Perechile de numere $(a; b) \in \{(7; 28); (14; 21); (21; 14); (28; 7)\}$. Fără a respecta ordinea, numerele care îndeplinesc condiția sunt 7 și 28, 14 și 21.

Scanned with OKEN Scanner

14. a) $\frac{3x+6}{x^2+x-2}=\frac{3(x+2)}{(x+2)(x-1)}=\frac{3}{x-1}$. Altfel se verifică egalitatea $(3x+6)(x-1)=$ $=3(x^3+x-2)$. Am folosit descompunerea $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$.

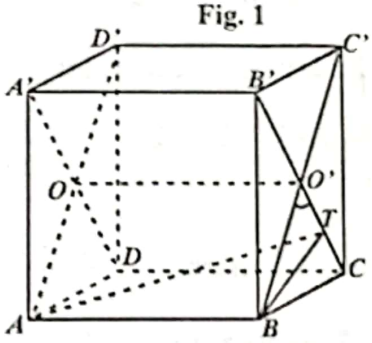
b) $\frac{3}{a-1}\in\mathbb{Z}$, atunci $a-1/3$ şi $a-1\in\{-3;-1;1;3\}$ iar $a\in\{-2;0;2;4\}$.

c) Expresia din enunţ, folosind rezultatul de la (**a)**) devine:

$$\left(\frac{2}{x+1}-\frac{4x}{(x-1)(x+1)}-\frac{3}{x-1}\right)\cdot\frac{1-x}{1}=\left(\frac{2(x-1)-4x-3(x+1)}{(x-1)(x+1)}\right)\cdot(1-x)=$$

$$=\frac{(-5x-5)(1-x)}{(x-1)(x+1)}=\frac{-5(x+1)(1-x)}{(x-1)(x+1)}=5.$$

Fig. 1



15. a) Vezi **figura 1.**

b) Aplicând formulele pentru volum şi arie putem scrie ecuaţiile $AB^2\cdot AA'=125\sqrt{3}$ şi $4AB\cdot AA'=100\sqrt{3}$ de unde, prin împărţire membru cu membru, avem că $\frac{AB}{4}=\frac{5}{4}$ deci $AB=5$ cm şi, înlocuind în una din ecuaţii, obţinem $AA'=5\sqrt{3}$ cm. (**fig. 1**)

c) Fie $T=\text{pr}_{B'C}B$. Conform **teoremei celor trei perpendiculare** avem că $AT\perp B'C$. În $\Delta BCB'$: $m(\sphericalangle B'BC)=90°$ iar $BT=\frac{BB'\cdot BC}{B'C}=\frac{5\sqrt{3}\cdot 5}{10}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$, am folosit că $B'C=10$ cm.

Atunci în ΔABT cu $m(\sphericalangle ABT)=90°$ avem $AT^2=AB^2+BT^2=25+\frac{75}{4}$ iar $AT=\frac{5\sqrt{7}}{2}$ cm.

d) Avem $(DCB')\cap(ABC')=OO'$, deoarece $AD'\cap A'D=\{O\}$ şi $BC'\cap B'C=\{O'\}$. Remarcăm faptul că $B'C\perp AB$ iar $BC'\perp AB$, şi cum $OO'\parallel AB$ ($ABO'O$ paralelogram) rezultă că $OO'\perp O'C$ şi $OO'\perp BO'$. Atunci $m(\sphericalangle((ABC'),(DCB')))=m(\sphericalangle BO'C)$. În $\Delta BO'C$ avem $BO'=\frac{B'C}{2}=5$ cm $=O'C$ iar $BC=5$ cm, deci $\Delta BO'C$ este echilateral. Drept urmare $m(\sphericalangle((ABC'),(DCB')))=60°$.

VARIANTA 99

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
32	–2,3	$2^2\cdot 5$	$\frac{3}{10}$	7	16	36	18	C	B	D	A

13. a) Notăm cu x, numărul elevilor participanţi la concurs şi cu y pe cei care nu a luat premiul I. Conform **figurii 1**, observăm că numărul elevilor care au luat premiul al III-lea şi diplome de participare, este egal cu 60 + 59 = 119. Deci $\frac{70}{100}\cdot y=119$ cu soluţia

$y=\frac{11900}{70}=170$ de elevi. Tot din grafic, observăm că $\frac{85}{100}\cdot x=170$, cu soluția $x=200$ de elevi.

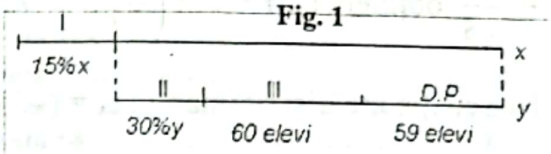


Fig. 1

b) 30% din $170=\frac{30}{100}\cdot 170=51$ de elevi.

14. a) Rezolvăm ecuația $f(x)=g(x)$, adică $-3x+3=$

$=-x+4$, cu soluția $x=\frac{-1}{2}$. $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}$, deci

punctul M de intersecție al graficelor funcțiilor are coordonatele $M\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$ **(fig. 2)**.

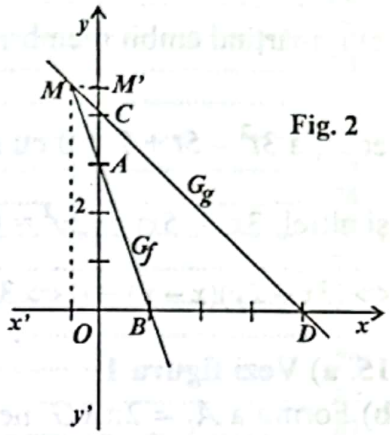


Fig. 2

b) Punctele $A(0; 3)$ și $B(1; 0)$ sunt situate pe graficul lui f iar punctele $C(0; 4)$ și $D(4; 0)$ sunt situate pe graficul funcției g.

c) Avem de calculat $\mathcal{A}_{MAC}$. Fie $M'=\text{pr}_{Oy}M$, $M'\left(0;\frac{9}{2}\right)$ și

atunci $\mathcal{A}_{MAC}=\frac{MM'\cdot AC}{2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{2}=\frac{1}{4}$ (u.a.)

15. a) Vezi **figura 3**.

b) Aria laterală a cilindrului este $\mathcal{A}_l=2\pi\cdot 6\cdot 12=144\pi$ cm^2 iar aria sferei este egală cu $\mathcal{A}_S=4\cdot\pi\cdot 36=144\ \pi$cm^2.

c) Volumul cilindrului este $\mathcal{V}_C=\pi\cdot 36\cdot 12=432\pi$ cm^3 iar volumul sferei este $\mathcal{V}_S=\frac{4\cdot\pi\cdot 6^3}{3}=288\pi$cm^3. Deci $\mathcal{V}_S<\mathcal{V}_C$.

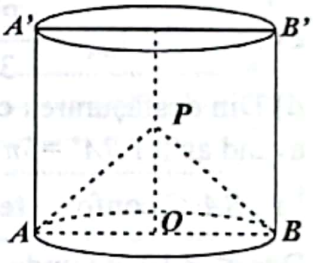


Fig. 3

În ΔOBP se calculează $BP=6\sqrt{2}$ cm. Aria corpului rămas după înlăturarea conului este:

$A_{CORP}=\pi R^2+\pi R\cdot BP+2\pi RG=36\pi+36\sqrt{2}\pi+144\pi=36\left(\sqrt{2}+5\right)\pi$ cm^2. **(fig. 3)**

VARIANTA 100

I+II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	$\frac{3}{2}$	3^2	$\frac{3}{5}$	60	140	66	3	D	A	D	B

13. a) Folosind scrierea zecimală avem: $\overline{x3}\cdot\overline{x5}+1=(10x+3)(10x+5)+1=100x^2+80x+16=(10x+4)^2$.

Altfel $\overline{x3}\cdot\overline{x5}=(10x+3)(10x+5)+1=(10x+3)\left[(10x+3)+2\right]+1=$

$=(10x+3)^2+2\cdot(10x+3)+1=(10x+3+1)^2=(10x+4)^2$.

b) Relația se mai scrie $10a+b-10b-a=ab-a$ de unde $10a=b(a+9)$ și atunci $a+9/10a$, dar $a+9/10(a+9)$, rezultă că $a+9/10(a+9)-10a$, deci $a+9/90$. Așadar $a+9\in\{1; 2; 3; 5; 6; 9; 10; 15; 18; 30; 45; 90\}$, cum $9\geq a>0$ avem $a\in\{1; 6; 9\}$. Perechile $(a, b)\in\{(1; 1); (6; 4); (9; 5)\}$.

Scanned with OKEN Scanner

14. a) Dacă –0,6 este soluție atunci $(2m+1)\cdot(-0,6)^2-7\cdot(-0,6)-6=0$ și cum $-0,6=-\frac{3}{5}$ obținem $(2m+1)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^2-7\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-6=0$ cu soluția $m=2$.

b) Ecuația are discriminantul $\Delta=(-5)^2-4\cdot3\cdot2=1$. Atunci $x\in\left\{\frac{2}{3};1\right\}$.

c) Împărțind ambii membri cu y^2 avem $3\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^2-5\cdot\left(\frac{x}{y}\right)+2=0$ și notând $\frac{x}{y}=t$, obținem ecuația $3t^2-5t+2=0$ cu soluțiile $t\in\left\{1,\frac{3}{2}\right\}$. Deci $\frac{x}{y}\in\left\{\frac{2}{3};1\right\}$. Putem aborda problema și altfel: $3x^2-5xy+2y^2=0\Leftrightarrow3x^2-3xy-2xy+2y^2=0\Leftrightarrow3x(x-y)-2y(x-y)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(3x-2y)(x-y)=0\Leftrightarrow3x-2y=0$ sau $x-y=0$, de unde $\frac{x}{y}\in\left\{\frac{2}{3};1\right\}$.

15. a) Vezi **figura 1.**

b) Formula $\mathcal{A}_l=2\pi RG$ ne dă $\mathcal{A}_l=2\pi\cdot5\cdot12\text{ cm}^2=120\pi\text{ cm}^2$.

c) Formula $\mathcal{V}_{con}=\frac{\pi R^2h}{3}=\frac{\pi\cdot OA^2\cdot OO'}{3}=100\pi\text{ cm}^3$.

d) Din desfășurarea cilindrului luăm numai jumătate, având astfel $BA'=5\pi$ cm. **(fig. 1)**

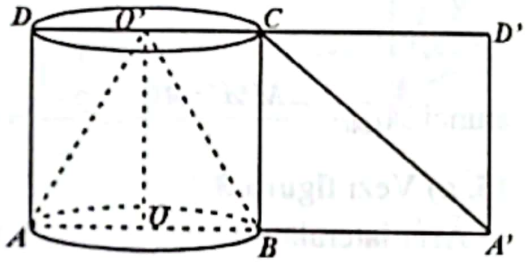


Fig. 1

În $\Delta BA'C$ conform **teoremei lui Pitagora** avem: $CA'=\sqrt{25\pi^2+144}$ cm.

Dar $\pi^2<10$, de unde $\sqrt{25\pi^2+144}<\sqrt{25\cdot10+144}=\sqrt{394}<\sqrt{400}=20$.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Varianta 1 3
Varianta 2 4
Varianta 3 5
Varianta 4 7
Varianta 5 8
Varianta 6 9
Varianta 7 11
Varianta 8 12
Varianta 9 12
Varianta 10 13
Varianta 11 14
Varianta 12 15
Varianta 13 17
Varianta 14 18
Varianta 15 19
Varianta 16 20
Varianta 17 22
Varianta 18 23
Varianta 19 24
Varianta 20 25
Varianta 21 27
Varianta 22 28
Varianta 23 29
Varianta 24 30
Varianta 25 31
Varianta 26 33
Varianta 27 34
Varianta 28 35
Varianta 29 36
Varianta 30 37
Varianta 31 38
Varianta 32 39
Varianta 33 40
Varianta 34 41
Varianta 35 42
Varianta 36 43
Varianta 37 43
Varianta 38 44
Varianta 39 45
Varianta 40 46
Varianta 41 47
Varianta 42 49
Varianta 43 51
Varianta 44 52
Varianta 45 53
Varianta 46 54
Varianta 47 56
Varianta 48 57
Varianta 49 59
Varianta 50 61
Varianta 51 63
Varianta 52 64
Varianta 53 65
Varianta 54 67
Varianta 55 68
Varianta 56 69
Varianta 57 70
Varianta 58 71
Varianta 59 72
Varianta 60 73
Varianta 61 74
Varianta 62 75
Varianta 63 75
Varianta 64 76
Varianta 65 78
Varianta 66 79
Varianta 67 80
Varianta 68 81
Varianta 69 82
Varianta 70 83
Varianta 71 84
Varianta 72 85
Varianta 73 86
Varianta 74 87
Varianta 75 88
Varianta 76 89
Varianta 77 90
Varianta 78 91
Varianta 79 92
Varianta 80 94
Varianta 81 95
Varianta 82 96
Varianta 83 98
Varianta 84 99
Varianta 85 100
Varianta 86 102
Varianta 87 103
Varianta 88 104
Varianta 89 105
Varianta 90 106
Varianta 91 107
Varianta 92 108
Varianta 93 109
Varianta 94 110
Varianta 95 111
Varianta 96 112
Varianta 97 112
Varianta 98 113
Varianta 99 114
Varianta 100 115

Scanned with OKEN Scanner

© Editura **TAIDA**
Toate drepturile aparţin Editurii TAIDA. Nici o parte a acestei cărţi nu poate fi retipărită, reprodusă sau utilizată în orice alt fel, inclusiv prin fotocopiere sau în formă electronică, fără avizul prealabil în scris al editurii.

PENTRU COMENZI VĂ RUGĂM SĂ VĂ ADRESAŢI EDITURII TAIDA

- **La adresa:** *Str. Vasile Lupu, nr. 70-74, Bl. P3, sc. 3, et. 3, ap. 12, Iaşi – 700309*
- **Telefonic:** *0232. 270250; Gsm. 0744. 320323*
- **Prin fax:** *0232-270250*
- **Prin email:** *office@edituratаida. ro*
- **Web:** *www. edituratаida.ro; www. eduzone.ro*

Editor: *TUDOR TCACIUC*
Corectura *AUTORILOR*
Pre-press: *MIHAELA URSULEANU*

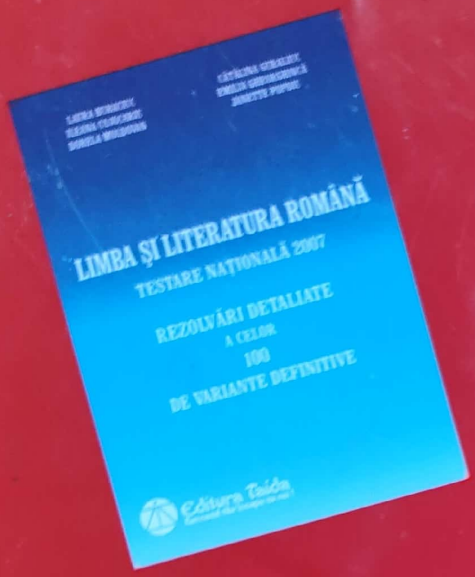
www. edituratаida. ro
www. eduzone. ro

TIPĂRIT LA:

Tipografia LIDANA
Calea Unirii, nr. 35
Tel: 0230/ 517 518
Mail: office@tipolidana.ro

Scanned with OKEN Scanner

Din aceeaşi colecţie
Editura TAIDA vă recomandă:



LIMBA ŞI LITERATURA ROMÂNĂ
TESTARE NAŢIONALĂ 2007
REZOLVĂRI DETALIATE
ALE CELOR
100
DE VARIANTE DEFINITIVE
Preţ: 12 lei

GEOGRAFIA ROMÂNIEI
TESTARE NAŢIONALĂ 2007
REZOLVĂRI DETALIATE
ALE CELOR
100
DE VARIANTE DEFINITIVE
Preţ: 12 lei

www.edituraTaida.ro
www.eduzone.ro

ISBN 973766921-5
9 789737 669216

Preţ: 8 lei

Scanned with OKEN Scanner